

EI VAADITA: Luentojen pohjalta merkintöjä ja johdatusta Nyquistin (Nyqvistin) stabiilisuuskäsitteeseen



$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega)$$

$$G_c(s) = \frac{L}{1+L}$$

Nimittäjä  $1+L(s) = 1 + \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{d(s)+n(s)}{d(s)} = 0$

Luupinsiirtofunktio (avoimen järjestelmän siirtofunktio) on  $L$ . Huom. Jos takaisinkytkentähaarassa olisi dynamiikkaa, esim.  $H(s)$ , niin silloin  $L(s)=G_c(s)G(s)H(s)$ . Mutta: suljettu systeemi on tällöin

$$G_{cl}(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Suljetun systeemin karakteristinen yhtälö saadaan aina yhtälöstä  $1+L(s)=0$ . Olkoon  $L$ :n osoittaja- ja nimittäjäpolynomit  $n$  ja  $d$ . Karakteristinen polynomi on  $d+n$ , joka määrittää samalla SIIRTOFUNKTION  $1+L(s)$  nollat. **Navat ovat puolestaan polynomin  $d$  nollakohdat eli luupinsiirtofunktion  $L$  navat samalla. Tätä tarvitaan myöhemmin.**

Tarkastellaan sitten kuvausta, jossa meillä on kompleksimuuttujan funktio  $F(s)$ , jossa  $s = \sigma + j\omega$  kulkee kompleksitasossa suljetun polun. Tutkitaan, minkä polun  $F(s)$  kulkee. Funktiolle  $F(s)$  ei tässä vaiheessa anneta mitään säätötekniisiä tulkintoja.

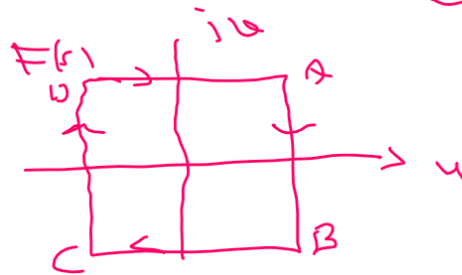
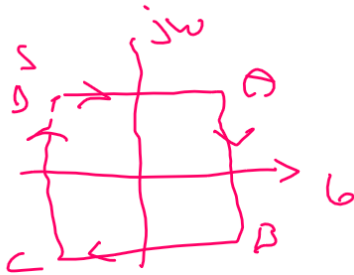
Katso seuraavaa kuvaa:

Kun  $s$ -tasossa kierretään suorakaiteen muotoinen polku,  $F(s)$  kiertää samanmuotoisen polun, jossa kierretyn suorakaiteen sivujen pituudet yleensä poikkeavat  $s$ -tason polusta. Kyseessä on kuitenkin suljettu käyrä.

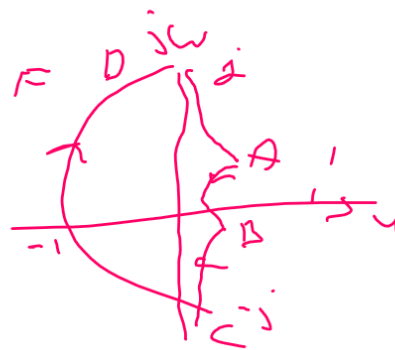
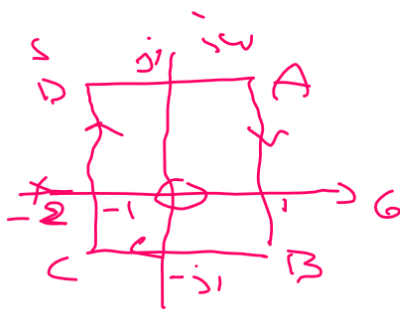
Toisessa esimerkissä  $F(s)=s/(s+2)$ , ja nyt  $F$ -tason suljettu käyrä on jo erimuotoinen.

Esim.  $F(s) = 2s + 1$

$$s = \sigma + j\omega \Rightarrow F(s) = 4 + j0 = 2(\sigma + j\omega) + 1 = \underbrace{2\sigma + 1}_4 + j\underbrace{2\omega}_0$$



Esim.  $F(s) = \frac{s}{s+2}$



Cauchyn teoreema ("Argumentin periaate", "Principle of Argument"): Pätee

$$N = Z - P$$

jossa P ja Z ovat s-tason polun sisään jäävät funktion F navat ja nollat. N kertoo, kuinka monta kertaa vastaava  $F(s)$ -käyrä kiertää origon myötäpäivään.

Esimerkki: Katso yllä olevaa kuvaa. s-polku kiertää funktion F nollan, mutta ei napaa pisteessä -2. Tällöin  $N = Z - P = 1 - 0 = 1$ . Oikealla oleva F-käyrä näyttää, että origo todella kierretään yhden kerran myötäpäivään. Jos s-tason käyrää laajennettaisiin siten, että myös napa pisteessä -2 kierrettäisiin, olisi  $N = Z - P = 1 - 1 = 0$ , ja F-käyrä muuttuisi siten, että origoa ei kierrettäisi ollenkaan.

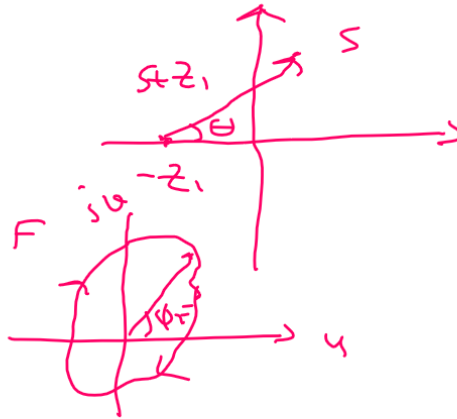
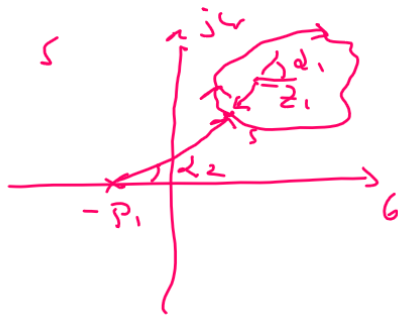
Katsotaan seuraavaksi, miten tuo Argumentin periaate voidaan perustella, ja miten teoriaa sitten sovelletaan säätötekniikassa stabiilisuuden tutkimiseen. Katso seuraavaa kuvaa.

# Cauchy'n teoreema ("Argumentin periaate")

$$N = Z - P = 1 - 0 = 1 \quad \text{kiernosta origon ympäri}$$

esim.

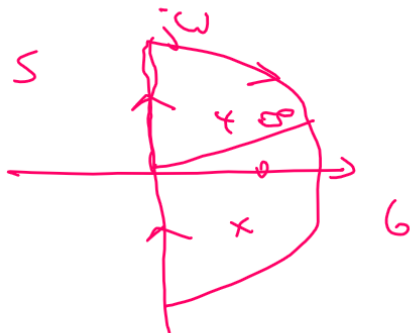
$$F(s) = K \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_i (s + p_i)}$$



$$F(s) = |F(s)| \angle F(s) = |F(s)| \left( \angle(s + z_1) - \angle(s + p_1) \right)$$

$$\phi_F = \phi_z - \phi_p$$

$$2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P \Rightarrow N = Z - P$$



Nyquistin polku

$$F(s) = H(s)G(s)$$

$$F_1(s) = F(s) - 1 = L(s)$$



$$Z = N + P$$

Olkoon funktio  $F$  muotoa  $F(s) = K \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_i)}$ , jossa nollat ovat  $-z_i$  ja navat  $-p_i$ . Tarkastellaan

kompleksitasossa mielivaltaista pistettä  $s$  (kuva ylhäällä oikealla). Vektorilaskennan mukaan nähdään, että vektori pisteestä  $-z_i$  pisteeseen  $s$  on todella  $s + z_i$ . Sama tietysti pätee napojen tapauksessa.

Vasemmanpuoleisessa kuvassa (s-taso) on tapaus, jossa F:llä on yksi nolla ja yksi napa. s-tasossa kierretään tuo nolla (kierto 1. kvadrantissa). Mikä on vektorin  $s+p_1$  kulman kokonaismuutos kierron aikana? Napa ei ole kiertävän käyrän sisällä, ja on aika helposti pääteltävissä, että vektorin kulman kokonaismuutos kierron aikana on 0. Tämä pätee kaikkiin nolliin ja napoihin, jotka ovat kiertävän käyrän ulkopuolella.

Mutta entäpä sitten tuo nolla  $-z_1$ , joka jää s-tasossa kiertävän suljetun käyrän sisään? Yhtä helposti kuin edellä nähdään, että kulman kokonaismuutos on 360 astetta eli  $2\pi$ . Tämä pätee kaikille nolille ja navoille kiertävän käyrän sisällä.

Nyt ajatellaan uudestaan funktiota  $F(s) = K \frac{\prod(s + z_i)}{\prod(s + p_i)}$ . Sen vaihe pisteessä s on siis nollien

vaiheiden summa miinus napojen vaiheiden summa. Kompleksitasossa s kierretään **kaikki** nollat ja navat. Olkoon napoja N kpl. ja nolliä Z kpl. Argumentin periaatteen mukaan saadaan (kulmien nettomuutosten perusteella)  $2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P$  eli  $N = Z - P$ . Eli sanoin: Kun s-tasossa kierretään kaikki funktion F navat ja nollat, niin F-tasossa käyrä kiertää origon N kertaa myötöpäivään.

**Vasta nyt otetaan säätötekniikan tulkinta.** Merkitään  $1+L(s) = F(s) = K \frac{\prod(s + z_i)}{\prod(s + p_i)}$ . Nollat ovat

karaktéristisen polynomin nollat, jotka määräävät suljetun systeemin stabiilisuuden. Ollaan siis kiinnostuneita siirtofunktion  $F(s) = 1+L(s)$  oikean puolitason navoista ja nolista, **vaikka niitä ei tiedettäisikään**. Kierretään s-tasossa oikea puolitaso äärettömällä puoliympyrällä, ns. **Nyquistin polkua (Nyquist path)** pitkin (katso kuva). Piirretään Nyquistin diagrammi funktiosta  $F = 1+L(s)$ . Sovelletaan argumentin periaatetta muodossa

$$Z = N + P$$

P on funktion  $F = 1+L$  oikeassa puolitasossa sijaitsevien napojen lukumäärä. Mutta se on itse asiassa sama kuin luupinsiirtofunktion L oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä, eli se tiedetään (tästä mainittiin aikaisemmin). N kertoo, kuinka monta kertaa käyrä  $F = 1+L$  (Nyquistin diagrammi) kiertää origon myötöpäivään. Se katsotaan diagrammista. Sitten voidaan kaavasta laskea Z, eli funktion  $F = 1+L$  oikeassa puolitasossa olevien nollien lukumäärä. Kyseessä ovat karakteristisen polynomin nollat, jotka määräävät stabiilisuuden.

Huom. 1. Edellä piirrettiin Nyquistin diagrammi funktiosta  $F(s) = 1+L(s)$ . Mutta tarkastelemalla funktiota  $F_1(s) = F(s) - 1 = L(s)$  nähdään, että mikään oleellinen ei muutu; ainoastaan kierron kannalta kriittinen piste origo siirtyy pisteeseen  $(-1, 0)$ . Diagrammi piirretään siis yleensä funktiosta  $L(s)$ , mikä on helpompaa, ja kierron kannalta kriittinen piste on  $(-1, 0)$ .

Huom. 2. Nyquistin diagrammin piirtäminen on kuitenkin haastavaa. Jos esimerkiksi Nyquistin polulla on L:n napoja (origossa, imaginääriakselilla), ne johtaisivat äärettömään lukuun kyseisellä taajuudella. Nämä kohdat on kierrettävä pienellä epsilon (hyvin pieni)-säteisellä puoliympyrällä (oikeaan puolitasoon päin). Esimerkki:  $L = \frac{2}{s(s+1)}$ . Origossa Nyquistin polulla on singulaaripiste.

Tämä kierretään pienellä puoliympyrällä. Saadaan  $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon e^{j\phi}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon} e^{-j\phi}$ . Kun polku

kiertää kulmassa  $\phi$ :  $-\pi/2 \rightarrow \pi/2$ , tämä vastaa Nyquistin diagrammissa kiertoa äärettömyydessä kulmasta  $\pi/2$  kulmaan  $-\pi/2$ , katso kuva.

Myös singulaaripisteet ja ääretön-kierto puoliympyrällä asettavat joskus haasteita Nyqvistin diagrammin piirtämisessä. Kaava  $Z=N+P$  edellyttää aina, että käyrä piirretään ja tulkitaan oikein. Esimerkiksi sellaista tilannetta, että  $Z$  olisi negatiivinen, ei voi tulla. Jos näin kuitenkin käy, on tehty jokin virhe.

$$L = \frac{2}{s(s+1)}$$

