ELEC-C1230 Säätötekniikka

Luku 9: Digitaalinen (diskreettiaikainen) säätö, johdatus, z-muunnos

Aalto-yliopisto

1

Esittely

- **Åström K. J., Wittenmark B.: *Computer Controlled Systems - Theory and Design* (3rd ed.), Prentice-Hall, 1997.**
- Franklin, Powell, Workman: *Digital Control of Dynamic Systems.* Third edition, Addison Wesley, 1998.
- Useissa jatkuva-aikaisen säädön perusoppikirjoissa (mm. Dorf) on johdatus digitaaliseen säätöön

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

2

Lukuohje

- Tietokonesäädön peruskäsitteet
- Tietokonesäädön suunnittelun kaksi peruslähestymistapaa
- Z-muunnos ja sen käyttö diskreettiaikaisen järjestelmän mallittamiseen
- Pulssinsiirtofunktio, tilaesitys
- Navat, nollat, stabiilisuus. Huomaa samankaltaisuus analogisen (jatkuva-aikaisen) säätöteorian kanssa.

Aalto-yliopisto

3

Esittely

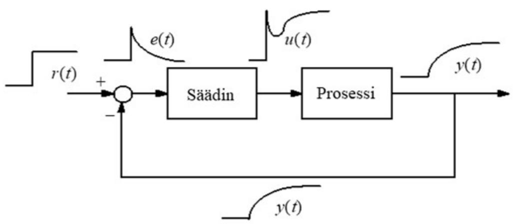
- **Johdanto, *z*-muunnos**
- **Diskreetit systeemit ja niiden ominaisuuksia**
- **Yleistä säätösuunnittelusta, jatkuva-aikaisen säätimen diskretointi**
- **PID-säädin ja sen diskreetit versiot, näytteenottovälin valinta**

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

4

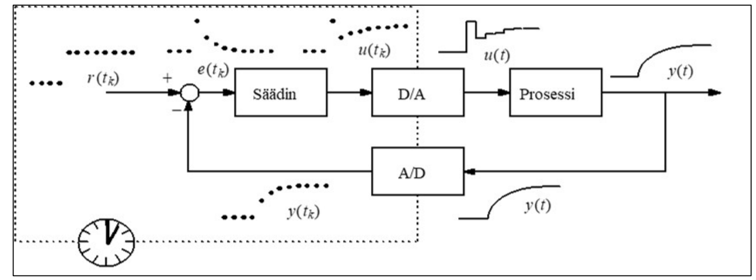
Analoginen (jatkuva-aikainen) säätöjärjestelmä

Analogisella säätimellä säädetty prosessi



5

Johdanto: Digitaalinen (diskreetti, diskreettiaikainen) säätöjärjestelmä



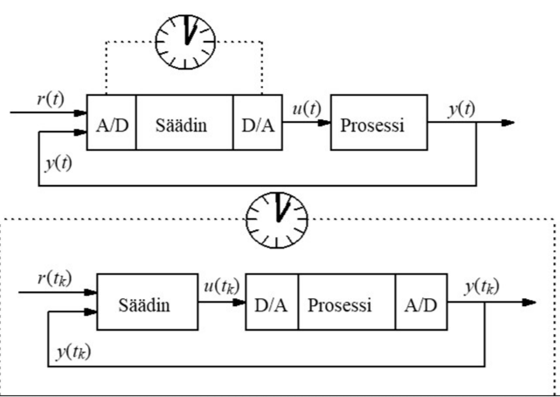
A/D-muunnoksessa analoginen signaali *näytteistetään* (sampling); D/A-muunnoksessa diskreetti säätösignaali muunnetaan analogiseksi (pito, hold).

6

Kaksi peruslähestymistapaa tietokone-säädön suunnitteluun

a.

b.



7

Johdanto

- **Systeemi sisältää sekä analogisia että digitaalisia signaaleja (hybridijärjestelmä)**
- **Analogisesta säädöstä tuttu perusongelma: miten tällaisia dynaamisia järjestelmiä käsitellään analyyttisesti?**
- **Ovatko jatkuvien järjestelmien aika- ja taajuustason menetelmät käytettävissä? Ovatko modifioitavissa?**
- **Miten säätimiä suunnitellaan? Entä implementoinnissa huomioitavat seikat?**
- **Kaksi lähestymistapaa: a. Suunnitellaan prosessille ensin jatkuva-aikainen säädin ja diskretoidaan se; b. Muodostetaan prosessille diskreetti ekvivalentti ja suunnitellaan säätäjä suoraan diskreettiajan menetelmillä. Nyt (kurssilla Säätötekniikka) käsitellään ainoastaan menetelmää a. Myöhemmin (maisteritason kurssilla Digitaalinen ja Optimaalinen säätö) lähtökohtana on b.).**

8

Aloitetaan: z-muunnos (vastine Laplace-muunnokselle)

Lukujonon $\{f_0, f_1, \cdots, f_k, \cdots\}$ lyhyemmin $\{f_k\}$ tai $f(k)$

z-muunnos määritellään

$$F(z) = Z(f_k) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots$$

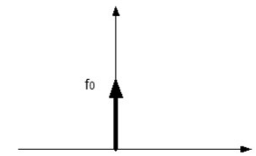
Jatkuvat järjestelmät: (differentiaaliyhtälöt/Laplace-muunnos)
Diskreetit järjestelmät: (differenssiyhtälöt/z-muunnos)

9

Esim. Aikadiskreetti impulssi

Lukujono

$$\{f_0, 0, 0, 0, \cdots\}$$



on impulssi (pulssi) voimakkuudella f_0 eli

$f_0\delta(k)$ jossa $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

Z-muunnos:

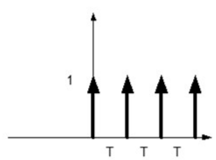
$$F(z) = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_0 \delta(k) z^{-k} = f_0$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

10

Esim. Aikadiskreetti (yksikkö)askelfunktio

Lukujono $\{1, 1, 1, 1, \cdots\}$



Termeissä f_k tai toisin merkittynä $f(k)$

k on juokseva (0,1,2,...) aikaa kuvaava indeksi. Absoluuttiaika hetkellä *k* on *kT*, jossa *T* on *näyteväli* (*diskretointiväli*). Askelfunktion *z*-muunnos:

$$Z\{f(k)\} = 1 + 1 \cdot z^{-1} + \cdots + 1 \cdot z^{-k} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

(geometrisen sarjan summa)

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

11

Esim. $f(k) = a^k, \quad |a| < 1$

Siis pulssijono on $\{1, a, a^2, a^3, \cdots\}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Summa konvergoi kompleksitason alueella $|az^{-1}| < 1$

eli silloin, kun $|a| < |z|$

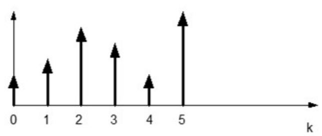
Konvergenssialueeseen ei tarvitse jatkossa kiinnittää huomiota, niinkuin ei Laplace-muunnoksenkaan kanssa tehty

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

12

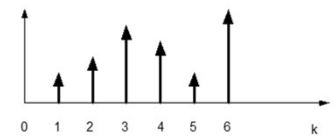
Siirto ajassa (”oikealle”=viive, ”vasemmalle”=ennakointi)

Pulssijono f(k):



$$F(z) = Z\{f(k)\} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + \cdots$$

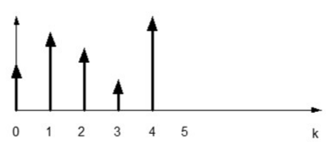
Viivästys yhdellä näytevälillä:



$$\begin{aligned} Z\{f(k-1)\} &= 0 + f_0 z^{-1} + f_1 z^{-2} + f_2 z^{-3} + \cdots \\ &= z^{-1}\left(f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots\right) \\ &= z^{-1} F(z) \end{aligned}$$

Siis yhden askeleen viive merkitsee kertomista termillä z^{-1} ; vastaavasti z^{-n} :llä, kun viive n askelta

Ennakointi yhdellä näytevälillä:



$$\begin{aligned} Z\{f(k+1)\} &= f_1 + f_2 z^{-1} + f_3 z^{-2} + \cdots \\ &= z \cdot \left(f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots\right) - z f_0 \\ &= zF(z) - z f_0 \end{aligned}$$

Vrt. Derivaatan Laplace-muunnokseen aikajatkuvassa tapauksessa

Z-muunnosteoreemoja ja muunnospareja

Määritelmä: $F(z) = Z\{f(k)\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$

Z-muunnos	Diskreetin ajan funktio	
$F(z)$	$f(k)$	T1
$C_1F_1(z) + C_2F_2(z)$	$C_1f_1(k) + C_2f_2(k)$	T2
$F(az)$	$a^{-k} f(k)$	T3
$z^{-a}F(z)$	$\begin{cases} 0; & k \le a-1 \\ f(k-a); & k \ge a \end{cases}, a > 0$	T4
$z^{a}F(z) - \left[z^{a} f(0) + z^{a-1} f(1) + \cdots zf(a-1)\right]$	$f(k+a)$, $a > 0$	T5

Z-muunnos	Diskreetin ajan funktio	
1	$\delta_k(k) = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 0; & k \ne 0 \end{cases}$	M1
$\frac{z}{z-1}$	1	M2
$\frac{z}{(z-1)^2}$	k	M3
$\frac{z}{z-a}$	a^k	M4
$\frac{az}{(z-a)^2}$	ka^k	M5
$\frac{z\sin(a)}{z^2 - 2z\cos(a) + 1}$	$\sin(ak)$	M6
$\frac{z(z-\cos(a))}{z^2 - 2z\cos(a) + 1}$	$\cos(ak)$	M7
$\frac{bz\sin(a)}{z^2 - 2bz\cos(a) + b^2}$	$b^k \sin(ak)$	M8
$\frac{z(z-b\cos(a))}{z^2 - 2bz\cos(a) + b^2}$	$b^k \cos(ak)$	M9

Aikadiskreetti systeemi

Esim. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön sukulainen on differenssiyhtälö

$$y(k+1) - ay(k) = u(k)$$

Alkuehdot esim. $y(0)=0$, $u(0)=1$, $u(k)=0$, $k>0$

Lasketaan suoraan yhtälöstä (differenssiyhtälö on suoraan laskenta-algoritmi

$$y(1) = u(0) = 1$$

$$y(2) = ay(1) + u(1) = a$$

$$y(3) = ay(2) + u(2) = a^2$$

Siis tuloksena on lukujono

$$\{a^k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

17

Huomaa, että differenssiyhtälö

$$y(k+1) - ay(k) = u(k)$$

tarkoittaa absoluuttiajassa

$$y\left[(k+1)T\right] - ay(kT) = u(kT)$$

Z-muunnetaan systeemiyhtälö

$$zY(z) - zy(0) - aY(z) = U(z)$$

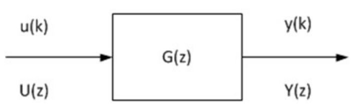
Alkuarvot merkitään nollaksi *pulssinsiirtofunktiota* johdettaessa, jolloin saadaan

$$(z-a)Y(z) = U(z)$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

18

Pulssinsiirtofunktio



$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-a}$$

Jos tulosuureena on yksikköpulssi $\delta(k)$
niin lähtö (pulssivaste) on siirtofunktion käänteismuunnos

Vertaa jatkuvan ajan siirtofunktion tapaukseen

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

19

Esimerkki.

systeemin dynamiikka $y(k) - ay(k-1) = bu(k-1)$

z-muunnetaan $Y(z) - az^{-1}Y(z) = bz^{-1}U(z)$

pulssinsiirtofunktio $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = b\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}} = \dfrac{b}{z-a}$

sarjakehitelmä $bz^{-1}\dfrac{1}{1-az^{-1}} = bz^{-1}(1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots)$

käänteismuunnos termeittäin antaa pulssivasteen $b\{0, 1, a, a^2, a^3, \ldots\}$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

20

Toinen tapa:

$$y(k) - ay(k-1) = bu(k-1)$$

on sama kuin (siirretään vain aikaindeksiä ja huolehditaan alkuarvot oikeiksi)

$$y(k+1) - ay(k) = bu(k)$$

$$zY(z) - aY(z) = bU(z)$$
$$(z-a)Y(z) = bU(z)$$
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z-a}$$

sama tulos

z-muunnos siis tehdään systeemimallien laskennallisen käsittelyn helpottamiseksi vrt. jälleen Laplace-muunnos jatkuvan ajan järjestelmissä.

Tulokset on tulkittava ainoastaan näytteenottohetkillä

$$t_k = kT, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Huom. muunnosparit (jälkimmäinen poikkeaa jonkin verran laplace-muunnoksen vastaavasta)

1. $z^{-a}F(z)$; $\begin{cases} 0, & k \le a-1, a > 0 \\ f(k-a), & k \ge a \end{cases}$

2. $z^a F(z) - \left[z^a f(0) + z^{a-1} f(1) + \cdots + z f(a-1) \right]$; $f(k+a), a > 0$

Käänteismuuntamisessa sovelletaan samoja ideoita kuin jatkuvien järjestelmien tapauksessa (lausekkeiden muokkaus ja taulukot)

Esim. $$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

Mutta: Tällaisille termeille ei löydy käänteismuunnosta taulukoista. Luovuutta!

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = z^{-1}z\frac{1}{(z-1)(z-2)} = z^{-1}z\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}\right)$$

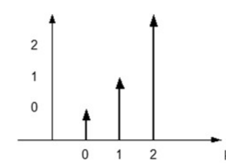
$$A = \underbrace{\lim}_{z\to 1} \frac{1}{z-2} = -1; \quad B = \underbrace{\lim}_{z\to 2} \frac{1}{z-1} = 1$$

Siis

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = z^{-1}z\left[\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right] = z^{-1}\left[\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right]$$

Sulkutermin sisällä olevan lausekkeen käänteismuunnos on

$$f(k) = 2^k - 1, \quad k = 0,1,2,\ldots$$



z^{-1} :llä kertominen merkitsee 1. askeleen viivästystä. Siis koko lausekkeen käänteismuunnos on

$$f(k-1), \quad k \ge 1 \quad \text{eli} \quad \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \\ 2^{k-1} - 1, & k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Stabiilisuus

Pulssinsiirtofunktioilla voidaan laskea kuten jatkuvien järjestelmien siirtofunktioillakin. Voidaan esim. muodostaa suljetun järjestelmän (pulssin)siirtofunktio, jonka nimittäjää kutsutaan karakteristiseksi polynomiksi. Sen nollakohdat ovat systeemin navat. Siirtofunktion osoittajan nollakohdat ovat systeemin nollat.

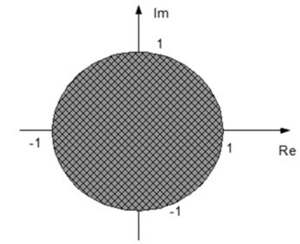
Pulssinsiirtofunktio voidaan jakaa summaksi, jonka termit ovat muotoa

$\frac{z}{z-a}$;käänteismuunnos a^k pysyy rajoitettuna, kun $|a| < 1$

Jos yksikin termi ”räjähtää”, koko vaste menee epästabiiliksi.

Stabiilisuusalue:

$$G_K(z) = \frac{z-a}{(z-b)(z-c)(z-d)}$$



Diskreetti systeemi on stabiili täsmälleen silloin, kun navat (b, c, d) ovat yksikköympyrän sisällä. Vertaa vasen puolitaso jatkuvien järjestelmien tapauksessa.

Siirto-operaattorit

Siirto-operaattori q eteenpäin ajassa

$$qy(k) = y(k+1)$$

Siirto-operaattori q^{-1} taaksepäin ajassa

$$q^{-1}y(k) = y(k-1)$$

Vastaavasti $q^n y(k) = y(k+n)$

$$q^{-n} y(k) = y(k-n)$$

(Jatkuva-aikaisissa tarkasteluissa on vain derivaattaoperaattori p.)

Esim. Aikatason differenssiyhtälö (systeemin tulo-lähtö-esitys)

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = b_0 u(k+1) + b_1 u(k)$$

voidaan merkitä muodossa

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$

jossa

$$A(q) = q^2 + a_1 q + a_2$$
$$B(q) = b_0 q + b_1$$

ovat *operaattoripolynomeja*. Vastaavanlainen esitys voidaan kirjoittaa q^{-1} :n potenssien avulla.

Huomaa muodollinen ekvivalenssi

$$p \Leftrightarrow s$$
$$q \Leftrightarrow z$$

Kyse on kuitenkin eri asioista: kun käytetään p :tä tai q:ta, toimitaan aikatasossa. s ja z liittyvät muunnoksiin, joilla siirrytään aikatasosta laplace- tai z-tasoon.

Voi tuntua turhalta teoretisoinnilta. Kuitenkin säätötekniikassa on erilaisia suunnittelumenetelmiä, joissa lähtökohtana on selkeästi joko aikatason esitys tai siirtofunktioesitys.

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

29

Tilaesityksestä pulssinsiirtofunktioon

Diskreeteillä järjestelmillä tilaesitys määritellään aivan analogisesti kuin jatkuvien järjestelmien tapauksessa; yhtälöiden derivaatat vain korvataan siirto-operaatiolla.

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$
$$y(k) = Hx(k)$$

Ryhdytään etsimään siirtofunktiota. Z-muunnetaan yhtälöt ja eliminoidaan tilamuuttujat (vrt. jälleen jatkuva-aikainen tapaus)

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

30

$$zX(z) = FX(z) + GU(z)$$
$$(zI - F)X(z) = GU(z)$$
$$X(z) = (zI - F)^{-1}GU(z)$$
$$Y(z) = HX(z) = H(zI - F)^{-1}GU(z)$$

Saadaan pulssinsiirtofunktio

$$\Sigma(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = H(zI - F)^{-1}G$$

vrt. jatkuva-aika: $C(sI - A)^{-1}B$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

31

Tulo-lähtöesityksestä tilaesitykseen

Aivan samankaltainen systemaattinen menettely kuin jatkuvilla järjestelmillä on käytettävissä

Esim.

$$y(k+2) - 1.3y(k+1) + 0.4y(k) = u(k+1) - 0.4u(k)$$

-tilaesitys?
-pulssinsiirtofunktio?

Kirjoitetaan yhtälö q-operaattorin avulla

$$q^2 y(k) - 1.3qy(k) + 0.4y(k) = qu(k) - 0.4u(k)$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

32

Siirretään q:ta sisältävät termit vasemmalle, muut oikealle

$$q^2 y(k) - 1.3qy(k) - qu(k) = -0.4y(k) - 0.4u(k)$$

Kirjoitetaan vasen puoli sisäkkäisinä sulkulausekkeina ja valitaan tilamuuttujat

$$q\underbrace{\left[q\underbrace{y(k)}_{x_1(k)} - 1.3y(k) - u(k)\right]}_{x_2(k)} = -0.4y(k) - 0.4u(k)$$

$$x_1(k) = y(k);\ x_2(k) = x_1(k+1) - 1.3x_1(k) - u(k)$$

$$x_2(k+1) = -0.4x_1(k) - 0.4u(k)$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Tilaesitykseksi saadaan

$$x_1(k+1) = 1.3x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = -0.4x_1(k) - 0.4u(k)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

joka matriisiesityksenä on

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1.3 & 1 \\ -0.4 & 0 \end{bmatrix}}^{F} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{bmatrix}}^{G} u(k)$$

$$y(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{H} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Pulssinsiirtofunktio

$$\Xi(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = H(zI - F)^{-1}G$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 \\ -0.4 & z-1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{bmatrix}}{z(z-1.3)+0.4} = \frac{z-0.4}{(z-0.8)(z-0.5)}$$

Nollat: $z_1 = 0.4$

Navat: $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.5$

Navat ovat yksikköympyrän sisällä, joten systeemi on stabiili.

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu