ELEC-C1230 Säätötekniikka

Välikoe 2. 14. 4. 2022

- *Luokassa pidettävä koe. Merkitse kaikkiin vastauspapereihin nimesi ja opintonumerosi.*
- *Kokeessa voi osallistua joko välikokeeseen tai tenttiin. Merkitse selvästi vastauspaperiin, kumpaan kokeeseen osallistut. Vain toiseen kokeeseen voi osallistua.*
- *Sallitut apuvälineet: Laskin sekä kurssisivuilla oleva kaavakokoelma tai erillinen Laplace-muunnostaulukko. Jokainen tuo tämän mukanaan kokeeseen.*
- *Laskinta saa käyttää vain apuvälineenä numeerisiin laskuihin. Ratkaisut eivät siis saa perustua yksinomaan laskimen käyttöön.*
- *Kokeessa on neljä (4) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt. Pelkkien tulosten antaminen ilman, että esitetään, miten ne on saatu, ei kelpaa hyväksyttäväksi ratkaisuksi.*

---

1. Tarkastellaan järjestelmää

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x(t)$$

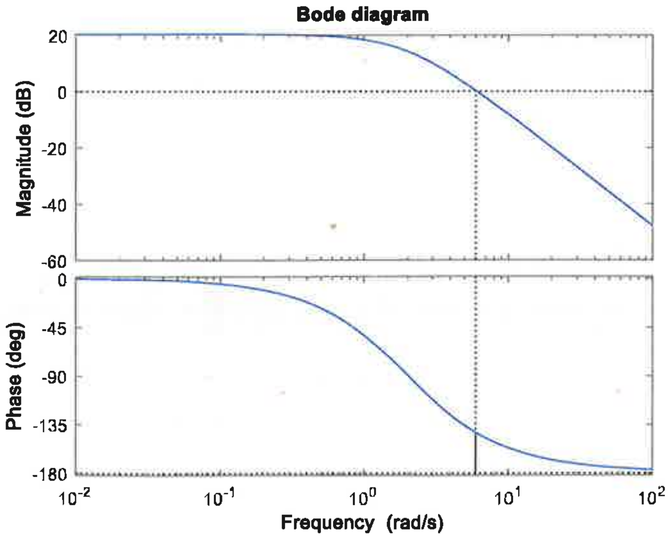
jossa b_1, b_2, c_1 ja c_2 ovat reaalisia vakioita.

a Määritä, millä parametrien arvoilla systeemi saavutettava? Entä tarkkailtava? (3p)

b. Olkoon $b_1 = 0$ ja $b_2 = b$ sellainen arvo, että systeemi on saavutettava. Suunnittele tilatakaisinkytketty säätölaki siten, että suljetun systeemin molemmat navat ovat pisteessä - 2. Tilojen oletetaan olevan mitattavissa. Referenssisignaalin arvo on 0. (3 p)

2. Tutkitaan negatiivisesti takaisinkytkettyä järjestelmää, jossa säätäjä on $G_c(s)$ ja prosessi $G(s)$. Avoimen järjestelmän siirtofunktioksi (luupinsiirtofunktioksi) määritellään $L(s) = G_c(s)G(s)$

Kuvassa on esitetty Boden diagrammi siirtofunktiosta $L(s) = \dfrac{K}{(s+2)^2}$.



a. Määritä K. (2 p)

b. Määritä diagrammista lukemalla arvio vaihevaralle (likimääräinen arvio riittää). (2 p)

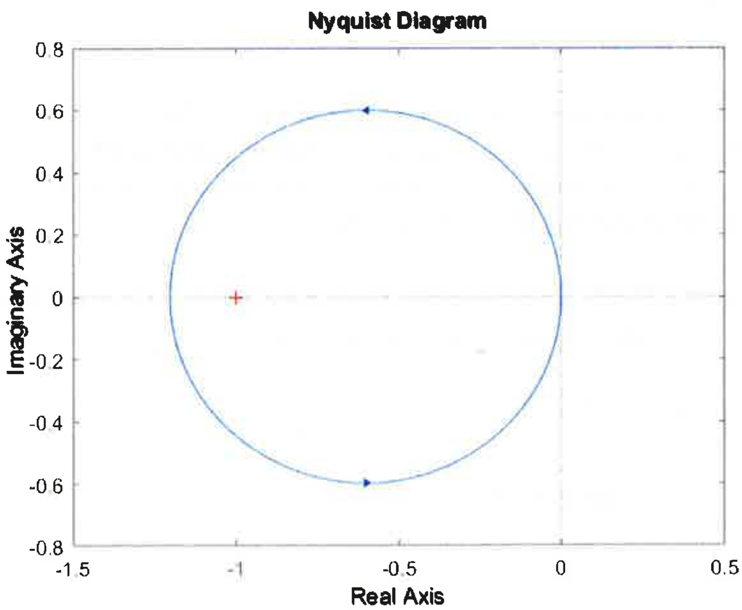
c. Esitä lauseke K:n arvon määräämiseksi siten, että vaihevara olisi 90 astetta? (Jos käytössäsi on laskin, voit toki laskea K:n arvon myös. Tätä ei kuitenkaan vaadita.) (2 p)

Huom. Oleellista on, että kerrot täsmällisesti, miten kysytyt arvot määrität / lasket. Diagrammista on vaikea lukea tarkkoja arvoja, eikä tulosten tarkkuus tämän takia ole tässä oleellista.

3. Negatiivisesti takaisinkytketyssä järjestelmässä avoimen järjestelmän siirtofunktio (luupinsiirtofunktio) on

$L(s) = G_c(s)G(s) = \dfrac{K}{(-1+\tau s)}$, $K = 1.2$, $\tau = 2$. Alla on esitetty systeemin Nyquistin diagrammi. Käyttämällä Nyquistin stabiilisuuslausetta määritä, onko suljettu systeemi stabiili. Tutki erikseen laskemalla, millä K:n arvoilla suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili?

(4 p+ 2p)



4. Kerro lyhyesti, mikä on (Shannonin) näytteenottoteoreema ja mikä on sen merkitys säätötekniikassa? Miten se huomioidaan diskreettiaikaisen säätöjärjestelmän näytevälin valinnassa? (6 p)

ELEC-C1230 Säätötekniikka

Välikoe 2 14.4.2022 / Ratkaisut

1. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$

a) Ohjattavuusmatriisi

$$C_C = \left[B \,\vdots\, AB \right] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 - 2b_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(C_C) = -b_1^2 - 2b_1 b_2 - b_2^2 = -\left(b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2\right) = -(b_1 + b_2)^2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $b_1 \neq -b_2$, jotta saavutettava

Tarkkailtavuusmatriisi

$$C_O = \begin{bmatrix} C \\ \hdashline CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 - 2c_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(C_C) = c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_2^2 = (c_1 - c_2)^2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $c_1 \neq c_2$, jotta tarkkailtava

b. $b_1 = 0$, $b_2 = b \neq 0$ 2.

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Lx\end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{x} = (A - BL)x$$

Suljetun systeemin navat = matriisin $A-BL$ ominaisarvot

$$sI - A + BL = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bl_1 & bl_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1+bl_1 & s+bl_2+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\cdot) = s^2 + bl_2 s + 2s + 1 + bl_1 = s^2 + (bl_2 + 2)s + bl_1 + 1$$

$$\underset{\text{tavoite}}{=} (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} bl_2 + 2 &= 4 \\ bl_1 + 1 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_2 &= \frac{2}{b} \\ l_1 &= \frac{3}{b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u^*(t) = -\begin{bmatrix} \frac{3}{b} & \frac{2}{b} \end{bmatrix} x(t)$$

2.

a) Pienillä taajuuksilla $s = j\omega \to 0$ $|L(j\omega)| = 20dB = 10$
(diagrammista)

$$|L(0)| = \frac{K}{4} = 10 \Rightarrow \underline{K = 40}$$

b) Vahvistuksen ylimenotaajuudella (0dB) vaihe on noin -145^0. Vaihevara noin $180^0 - 145^0 = 35^0$

(Tarkka $36,9^\circ$)

Vaihevara näkyy Boden diagrammissa suoraan kiinteänä pystyviivana.

c) Vaihevara 50^0 saavutettaisiin, jos vahvistuksen ylimenotaajuus olisi n. 2 rad/s.

Tällä taajuudella vahvistus on

$$|L(j\cdot 2)| = \left|\frac{40}{(2+j\cdot 2)^2}\right| = \frac{40}{4+4} = \frac{40}{8}$$

eli $20\lg\left(\frac{40}{8}\right) \approx 14\,dB$, mikä voitaisiin katsoa myös Boden vahvistuskäyrästä. Vahvistuksen pitää siis pudota tuo 14 dB

$$20\lg K - 20\lg K_u = 20\lg\frac{K}{K_u} = 14 \Rightarrow \frac{K}{K_u} = 10^{\frac{14}{20}}$$

$$\Rightarrow \underline{K_u = K/10^{\frac{14}{20}} = 40/10^{\frac{14}{20}} \approx 8}$$

3. Nyquistin stabiilisuuslause. Suljetun systeemin oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä on

$$Z = N + P$$

jossa P on avoimen järjestelmän oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä ja N on Nyquistin diagrammin myötäkiertojen lukumäärä kriittisen pisteen $(-1, 0)$ ympäri.

Tässä $P = 1$, $N = -1$ (kiertää kriittisen pisteen kerran vastapäivään)

Huom. lähtee pisteestä $(-1.2, 0)$ ja päätyy suurilla taajuuksilla origoon.

$$\Rightarrow Z = N + P = -1 + 1 = \underline{0}$$

Suljettu systeemi on stabiili, koska sillä ei ole yhtään napaa oikeassa puolitasossa.

Karakteristinen yhtälö $1 + L(s) = 1 + \frac{K}{-1+5s} = 0$

$$\Rightarrow -1 + 5s + K = 0 \Rightarrow s = \frac{-K+1}{5}$$

Suljetulla systeemillä on napa pisteessä $\frac{-K+1}{5} = \frac{-K+1}{2}$

Stabiili, kun $-K+1 < 0 \Rightarrow \underline{K > 1}$

Voitaisiin myös päätellä Nyquistin diagrammista.

4. Kun signaali näytteistetään kulmataajuudella

$W_s = 2\pi f_s = 2\pi / h$, h näyteväli,

niin jatkuvan signaalin taajuussisältö eli spektri leviää taajuustasossa muodostaen periodisen signaalin, jossa jokainen taajuuskomponentti w leviää w_s:n välein yli koko taajuustason.

Signaalin taajuuskomponentit eivät saa asettaa toistensa päälle, eli spektri ei saa laskostua ("aliasing").

Aliasing vältetään, kun näytteitä otetaan vähintään taajuudella $W_s = 2w_0$, jossa w_0 on jatkuvan signaalin suurin taajuus. Siis pitää olla $w_s > 2w_0$.

Ilmaistaan usein myös toteamalla, että jatkuvan signaalin kaikki taajuuskomponentit ovat Nyquistin taajuuden $W_N = \frac{w_s}{2}$ sisällä.

Säädössä näytteistettyjen signaalien informaation on oltava oikein. Näytevälin on oltava riittävän lyhyt, jotta laskostumista ei tapahdu. Jos jatkuvassa signaalissa on korkeita mutta merkityksettömiä taajuuskomponentteja (esim. kohinaa), nämä voidaan suodattaa pois ennen näytteistämistä.