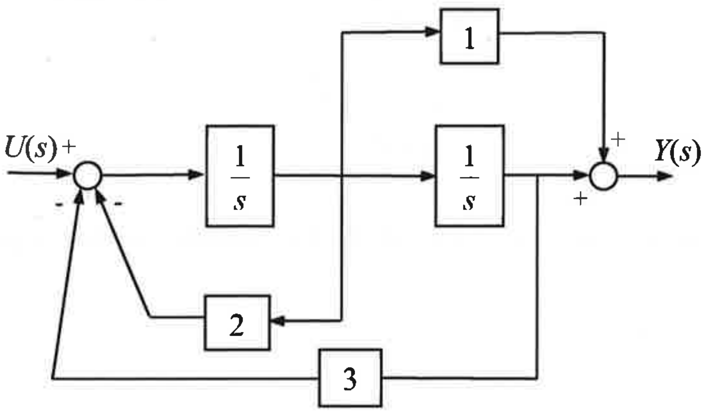
ELEC-C1230 Säätötekniikka
Tentti 14. 4. 2022

- *Luokassa pidettävä koe. Merkitse kaikkiin vastauspapereihin nimesi ja opintonumerosi.*
- *Kokeessa voi osallistua joko välikokeeseen tai tenttiin. Merkitse selvästi vastauspaperiin, kumpaan kokeeseen osallistut. Vain toiseen kokeeseen voi osallistua.*
- *Sallitut apuvälineet: Laskin sekä kurssisivuilla oleva kaavakokoelma tai erillinen Laplace-muunnostaulukko. Jokainen tuo tämän mukanaan kokeeseen.*
- *Laskinta saa käyttää vain apuvälineenä numeerisiin laskuihin. Ratkaisut eivät siis saa perustua yksinomaan laskimen käyttöön.*
- *Kokeessa on viisi (5) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt. Pelkkien tulosten antaminen ilman, että esitetään, miten ne on saatu, ei kelpaa hyväksyttäväksi ratkaisuksi.*

---

1. Määritä alla olevan järjestelmän kokonaissiirtofunktio. Mitkä ovat nollat ja navat? Onko systeemi minimivaiheinen? (2 +2+2 p)

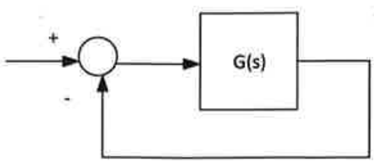


2. Olkoon epästabiili prosessi $G(s)=\dfrac{1}{s-1}$. Käytetään negatiivista takaisinkytkentää ja säätäjää

$K_P\dfrac{1+T_is}{T_is}$, jossa viritysparametrit K_P ja T_i ovat positiivisia vakioita.

a. Minkäniminen säätäjä on kyseessä? Millä parametrien valinnoilla saadaan *P*-säätäjä? (2 p)
b. Onko prosessi stabiloitavissa ja jos on, millä viritysparametrien arvoilla tämä onnistuu? (2 p)
c. Onko prosessi stabiloitavissa pelkällä *P*-säätäjällä (edelleen siis negatiivinen takaisinkytkentä)? Jos on, jääkö lähtösuureeseen pysyvä poikkeama, kun referenssin tulee askelheräte? Vertaa b-kohdan tapaukseen. (2 p)

3. Tarkastellaan prosessia $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)^2}$ (K vakio) ja suljettua systeemiä

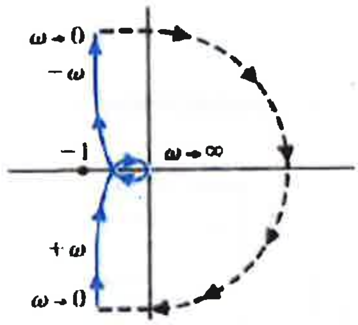


a. Laske, missä negatiivisen reaaliakselin pisteessä avoimen järjestelmän Nyquistin diagrammi leikkaa reaaliakselin. (2 p)

b. Käytä Nyquistin stabiilisuuslausetta ja määritä, millä *K*:n positiivisilla arvoilla suljettu systeemi on stabiili (2 p)

c. Valitse *K* siten, että suljettu systeemi on stabiili, hahmottele Nyquistin diagrammi paperille ja merkitse siihen, miten kuvasta on nähtävissä vahvistus- ja vaihevara (2 p)

Ohje: Alla olevassa kuvassa on siirtofunktion $H(s)=\dfrac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ Nyquistin diagrammi. Se on piirretty eräillä parametrien *K*, τ_1 ja τ_2 arvoilla, jotka eivät näy kuvassa. Huomaa, että näiden parametrien arvoista riippuu, missä käyrä leikkaa negatiivisen reaaliakselin (ei siis välttämättä pisteen (-1,0) ja origon välissä kuten kuvassa).



4. Tutkitaan vaiheenjohtokompensaattoria, jonka siirtofunktio voidaan esittää muodossa

$$G(s)=K\cdot\frac{\left(\frac{1}{\omega_0}s+1\right)}{\frac{1}{k\omega_0}s+1}$$

jossa *K*, *k* ja ω_0 ovat viritysparametreja. Tiedetään, että kun maksimi vaiheenjohto ϕ_m saavutetaan kulmataajuudella ω_m, , niin pätee

$$\omega_m=\sqrt{k}\cdot\omega_0,\qquad \sin\phi_m=\frac{k-1}{k+1}$$

a. Vastaa siirtofunktion avulla matemaattisesti perustellen, onko *k*:n arvo suurempi vai pienempi kuin 1. (2 p)

b. Mitkä ovat kompensaattorin vahvistuksen ja vaiheen arvot pienillä taajuuksilla? Entä suurilla taajuuksilla? (2 p)

c. Määritä kompensaattorin vahvistuksen arvo kulmataajuudella ω_m. (2 p)

5. Selitä mitä tarkoitetaan säätäjän *windup*- ja *antiwindup*-ilmiöillä. Miten sovellat esimerkiksi PID-säätäjän toteutuksessa? (6 p)

ELEC-C1230 Säätötekniikka

Tentti 14.4.2022 / Ratkaisut

1. Merkitään integraattoreiden välissä olevaa signaalia termillä $\mathcal{E}(s)$.

Nyt $Y(s) = \left(\frac{1}{s}+1\right)\mathcal{E}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{E}(s) + \mathcal{E}(s)$

$$\mathcal{E}(s) = \frac{1}{s}\left\{U(s) - 2\mathcal{E}(s) - 3\cdot\frac{1}{s}\mathcal{E}(s)\right\}$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{E}(s) = sU(s) - 2s\mathcal{E}(s) - 3\mathcal{E}(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+2s+3)\mathcal{E}(s) = sU(s) \Rightarrow \mathcal{E}(s) = \frac{s}{s^2+2s+3}U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+1}{s}\cdot\frac{s\,U(s)}{s^2+2s+3} = \frac{s+1}{s^2+2s+3}U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+3}$$

$$s^2+2s+3=0 \Rightarrow s = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot3}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-2^2\cdot2}}{2} = -1\pm j\sqrt{2}$$

Navat: $-1 \pm j\sqrt{2}$

Nollat: $s+1=0 \Rightarrow s=-1$

Systeemi on minimivaiheinen (nolla vasemmassa puolitasossa)

2. 2.

a) $K_p\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$, PI-säätöjä

Kun $T_i \to \infty$, saadaan P-säätöjä, jonka vahvistus on K_p

b) Suljetun systeemin siirtofunktio

$$G_{cl}(s) = \frac{K_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \cdot \frac{1}{s-1}}{1 + K_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{K_p(1+T_i s)}{T_i s(s-1) + K_p(1+T_i s)}$$

$$= \frac{K_p(1+T_i s)}{T_i s^2 - T_i s + K_p + K_p T_i s} = \frac{K_p(1+T_i s)}{T_i s^2 + T_i(K_p-1)s + K_p}$$

Karakteristinen yhtälö: $T_i s^2 + T_i(K_p-1)s + K_p = 0$

Routh-Hurwitz-menetelmä:

$$\begin{array}{l|lll} s^2 & T_i & K_p & 0 \\ s^1 & T_i(K_p-1) & 0 & 0 \\ s^0 & K_p & & \end{array}$$

$\Uparrow$

Ei merkinvaihtoja, kun $K_p > 1$. $T_i > 0$ oli oletettu.

[$K_p = 1$ johtaa marginaalisesti stabiiliin järjestelmään. Hyväksytään, mutta ei vaadita]

c) P-säätö, suljettu systeemi

$$G_{ce2}(s) = \frac{K_p \frac{1}{s-1}}{1 + K_p \frac{1}{s-1}} = \frac{K_p}{s-1+K_p}$$

Napa $s = 1 - K_p$ on vasemmassa puolitasossa, kun $K_p > 1$. Siis on stabiloitavissa P-säätäjällä.

Staattinen vahvistus referenssistä ulostuloon

$$G_{ce2}(0) = \frac{K_p}{-1+K_p}$$ jää pysyvä poikkeama.

B-kohdan PI-säätäjällä sen sijaan

$$G_{ce}(0) = \frac{K_p}{K_p} = 1$$ eli ei pysyvää poikkeamaa.

Tulokset tässä ovat ennakoidun kaltaisia.

3.

a) Avoimen järjestelmän siirtofunktio

$$L(s) = G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2} \Rightarrow L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)^2}$$

Negatiivinen reaaliakseli leikataan, kun $\measuredangle L(j\omega) = -\pi$

$$\measuredangle L(j\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\omega) = -\pi$$

$$\Rightarrow \arctan(\omega) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_{cr} = 1$$

$$\Rightarrow \left| L(j\omega_{cr}) \right| = \left| \frac{K}{\omega(1+\omega^2)} \right| = \frac{|K|}{1\cdot(1+1)} = \frac{|K|}{2}$$

Voidaan olettaa, että $K > 0$. Leikkauspiste $\left(-\frac{K}{2}, 0\right)$.

[Jos olisi $K < 0$, leikkauspiste olisi positiivisella reaaliakselilla $\left(-\frac{K}{2}, 0\right)$. Negatiivinen reaaliakseli leikattaisiin ainoastaan äärettömyydessä. Ei vaadita.]

b) Nyquistin stabiilisuuslause: $Z = N + P$, jossa

P on avoimen järjestelmän oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä.

N on Nyquistin diagrammin myötäkiertojen lukumäärä kriittisen pisteen $(-1, 0)$ ympäri

Z on suljetun systeemin oikeassa puolitasossa olevien napojen lukumäärä.

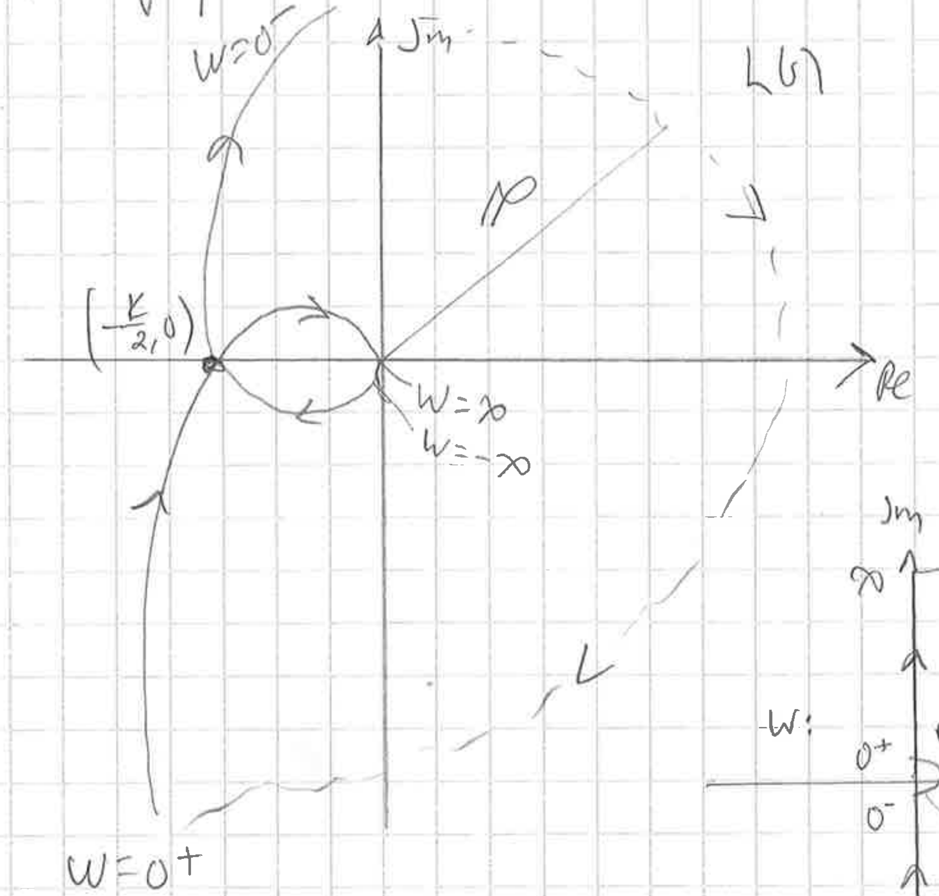
Nyt $P = 0$, joten $Z = N$. Z:n pitää olla 0, joten ei sallita kiertoja kriittisen pisteen ympäri.

$\Rightarrow K < 2$.

Eli kun oletetaan $K > 0$, niin $0 < K < 2$.

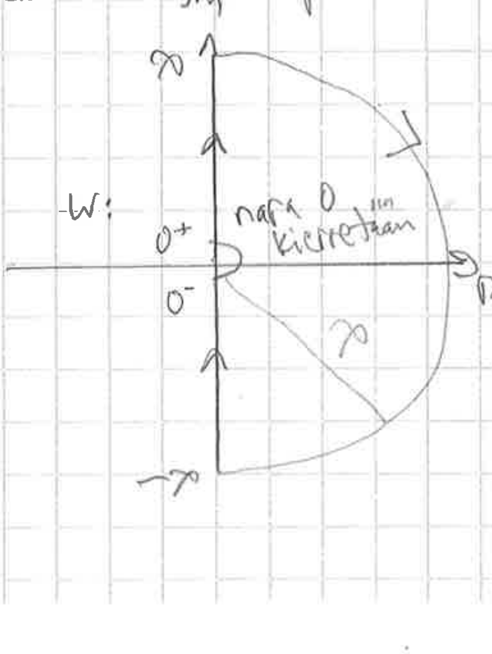
(Jos K olisi negatiivinen, suljettu systeemi olisi vääjäämättä negatiivinen)

c. Tehtävän papereissa olevan kuvan mukaan



Nyquistin polku

5



4. 6.

$$G(s) = K\frac{\left(\frac{1}{w_0}s+1\right)}{\frac{1}{Kw_0}s+1} \quad , G(jw) = K\frac{1+j\frac{w}{w_0}}{1+j\frac{w}{Kw_0}}$$

a) Murtoviivaapproksimaatiossa kulmataajuuden kulmapisteet ovat

w_0 ja Kw_0

Vaihekäyrä muuttuu alkaen pisteistä $0.1w_0$ ja $0.1Kw_0$

Koska kyseessä on vaiheenjoht. kompensaattori, pitää olla $K>1$, jotta johto $0.1w_0$ alkaa vaikuttaa ensin.

Toki nähtäisiin myös yhtälöstä $\sin\phi_m = \frac{K-1}{K+1}$

pitää olla $K>1$, jotta maksimi vaiheenjohto $\phi_m > 0$.

b) Pienillä taajuuksilla voidaan katsoa $s \to 0$ ja suurilla $s \to \infty$

$s \to 0$: $G(s) = K$ eli $|G| = \underset{= K,\ K>0}{|K|}$, $\measuredangle G = 0$

$s \to \infty$: $G(s) = K\frac{\frac{1}{w_0}+\frac{1}{s}}{\frac{1}{Kw_0}+\frac{1}{s}} \Longrightarrow K \cdot K.$, $\measuredangle G = 0.$

eli $|G| = K \cdot K$

4c.

$$\omega_m = \sqrt{K} \cdot \omega_0$$

$$|G(i\omega)| = K \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{K\omega_0}\right)^2}} = K\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\omega_m}{\omega_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega_m}{K\omega_0}\right)^2}}$$

$$= K\sqrt{\frac{1+K}{1+\frac{K}{K^2}}} = K\sqrt{\frac{K(1+K)}{K+1}} = K\sqrt{K}$$

Desibeleinä tämä on

$$20\lg|G(i\omega)| = 20\lg K + 20\lg K^{\frac{1}{2}} = 20\lg K + 10\lg K$$

5. Windup = integraattorin kyllästyminen.

Kun säädetty systeemi menee virhetilaan (esim. toimilaite hajoaa) ei säätövirhettä saada nollaan, jolloin integraattori jatkaa integroimista suuriin arvoihin. Virhetilanteen poistuttua integraattorin arvo aiheuttaa vaikeuksia systeemin toiminnalle.

Antiwindup: Toimitaan siten, että säätövirheen integraali ei karkaa. Helpoin ja erittäin toimiva tapa: kun systeemi on virhetilassa, säätäjä lopettaa integroimisen. Helppo toteuttaa tietokone-säätäjän koodilla.