1. LUKUJONOT

TÄSSÄ <u>JONO</u> = ÄÄRETÖN LUETTELO REAALILUKUJA

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ENSIMMÄINEN TERMI

TOINEN TERMI

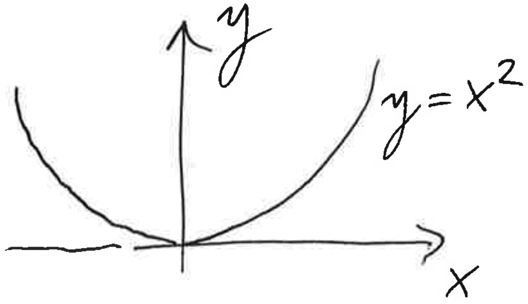
YLEINEN TERMI

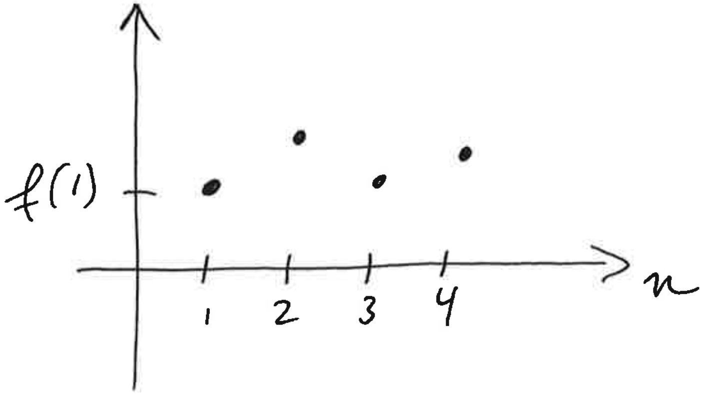
(ESIM. $a_n = 2^n$)

JONO VOIDAAN AJATELLA FUNKTIOKSI

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$





ESIM. $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ VOIDAAN MERKITÄ LYHYESTI

$a_n = n^2$ TAI $(n^2)_{n=1}^{\infty} = (n^2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 9, \dots)$

ESIM. $a_n = \frac{1}{n}$: $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

$\left(\frac{1}{k+3}\right)_{k=-2}^{\infty}$

$n \in \mathbb{N}$ OLI KÄTEVÄ, JOS OLISI $n = 0, 1, 2, \dots$ JAETTAISIIN NOLLALLA

ESIM. $3, \; 3.1, \; 3.14, \; 3.141, \; 3.1415, \; \ldots$

a_n = LUVUN π n ENSIMMÄISTÄ DESIMAALIA

ESIM. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$

KOLMIOLUVUT

$$a_n = \frac{n+(-1)^n}{n} \longrightarrow \left(0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \ldots\right)$$

$$\xleftarrow[?]{}$$

ESIM. ETSI YLEINEN TERMI JONOILLE

ⓐ $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

$2^0 \nearrow 1$, $2^1 \nearrow 2$

$a_n = 2^{n-1}$

ⓑ $\frac{7}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7}{8}, \frac{7}{11}, \frac{1}{2}, \frac{7}{17}, \ldots$

$+3 \quad +3 \quad +3$

$\frac{1}{2} \,/\!/\, \frac{7}{14}$

$a_n = \frac{7}{3n-1}$

LUKUJONO VOIDAAN ANTAA MYÖS PALAUTUSKAAVALLA (REKURSIIVISESTI)

ⓐ $S_n = S_{n-1} + 3, \; n > 1, \; S_1 = 4$ $(4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$

ⓑ $S_n = -3S_{n-1}, \; n > 1, \; S_1 = 2$ $(2, -6, 18, -54, \ldots)$

ⓒ $S_n = \frac{1}{2}(S_{n-1} + S_{n-2})$, $n > 2$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \dots)$

ⓓ $S_n = n S_{n-1}$, $n > 1$, $S_1 = 1$ $(1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots)$ (1–3)

1·2·3·4

$$a_n = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$$
$$= n!$$ (KERTOMA)

ESIM. MÄÄRÄÄ PALAUTUSKAAVA JONOILLE

ⓐ $1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$

2 4 8 16

$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$, $a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2^{2-1} = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ ok

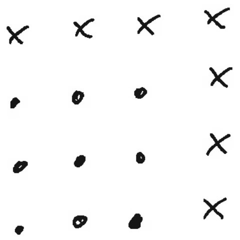
ⓑ 3 5 7 9

$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

$(a_n = n^2)$

$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n > 1$, $a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2\cdot 2 - 1$
$= 1 + 3 = 4$ ok



$4^2 = 3^2 + 7$
$= 3^2 + 2\cdot 3 - 1$

LUKUJONON SUPPENEMINEN

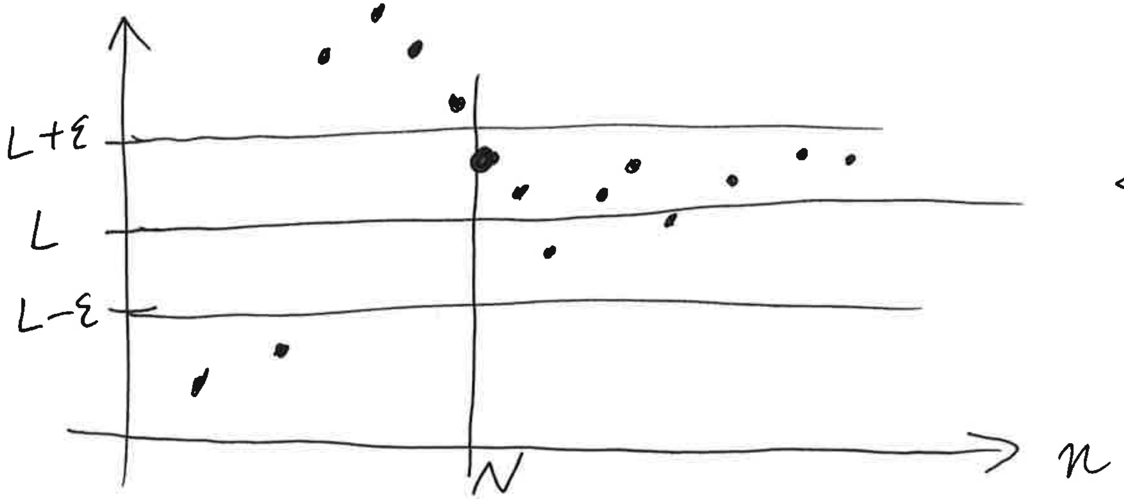
JONOLLA (a_n) ON **RAJA-ARVO** $L \in \mathbb{R}$ (LIMIT), MERKITÄÄN $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, JOS LAUSEKKEEN $|a_n - L|$ ARVO LÄHESTYY NOLLAA, KUN $n \to \infty$.

TARKEMMIN: JOKAISTA $\varepsilon > 0$ VASTAA INDEKSIN ARVO $N = N(\varepsilon)$ SITEN, ETTÄ

ε EPSILON

$|a_n - L| < \varepsilon$, KUN $n \geq N$.

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$\iff -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \| +L$$
$$\iff L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$



JOS RAJA-ARVOA $L \in \mathbb{R}$ EI OLE, SANOTAAN, ETTÄ LUKUJONO **HAJAANTUU**.

ESIM. $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$ KAIKILLA $c \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

TODISTUS (MÄÄRITELMÄN PERUSTEELLA):

OLKOON $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{c}{n^p} - 0 \right| = \left| \frac{c}{\underbrace{n^p}_{>0}} \right| = \frac{|c|}{n^p} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |c| < \varepsilon n^p$$

$$\Leftrightarrow \frac{|c|}{\varepsilon} < n^p \quad \| (\ )^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{|c|}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}} < n$$

VALITAAN $N \in \mathbb{N}$ SITEN, ETTÄ $N > \left(\frac{|c|}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}$.

NYT $n \geq N \Rightarrow \left| \frac{c}{n^p} - 0 \right| < \varepsilon$. $\square$

JONO VOI HAJAANTUA KOLMELLA ERI TAVALLA:

ⓐ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ESIM, $a_n = \frac{n^2+1}{n} = \underbrace{n}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to "\infty + 0" = \infty$, KUN $n \to \infty$

ⓑ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ESIM, $a_n = \frac{1-n^2}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{- n}_{\to -\infty} \to -\infty$, KUN $n \to \infty$

ⓒ RAJA-ARVOA EI OLE OLEMASSA

ESIM, $a_n = (-1)^n$: $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ JONOLLA EI OLE RAJA-ARVOA

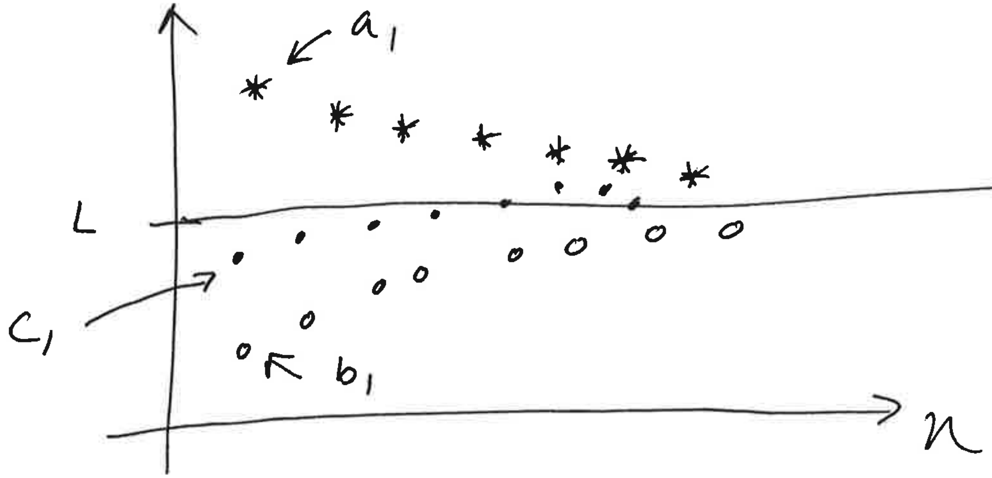
ESIM. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$, SILLÄ

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad \boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$$

$$= \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

KOSKA $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$, NIIN MYÖS

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ ("SUPPILO PERIAATE")



JOS $a_n \le c_n \le b_n$

KAIKILLA $n \ge N$

(TIETYN RAJA-INDEKSIN
N JÄLKEEN)

JA $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

NIIN $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L.$

<u>ESIM.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{KUN } |q|<1 \\ 1, & \text{KUN } q=1 \end{cases}$

MUISSA TAPAUKSISSA JONO <u>HAJAANTUU</u>

$q=-1$: $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$

$q>1$: $q^n \to \infty$

$q<-1$: $\not\exists$ RAJA-ARVOA

ESIM.

$$\frac{n^2+3n-1}{3n^2-6n+10} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{6}{n}+\frac{10}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{6}{n}+\frac{10}{n^2}}$$

RAJA-ARVON LASKUSÄÄNNÖT (KATSO LUENTODIAT)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{3n^2-6n+10} \overset{\downarrow}{=} \frac{1+0-0}{3-0+0} = \frac{1}{3}.$$

ERÄITÄ MUITA RAJA-ARVOJA:

- $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, KUN $a>0$ ← VAKIO

SYY

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\ln a^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\ln a} = e^{\frac{\ln a}{n}} \leftarrow \text{MENEE KOHTI } \infty$$

$$\rightarrow e^0 = 1, \text{ KUN } n\to\infty.$$

- $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

SYY

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\rightarrow 0\ ?}} = e^0 = 1$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ = NEPERIN LUKU

  $$\approx 2{,}7\ \underline{1828}\ \underline{1828}\ 45\ \underline{90}\ 45\ldots$$

  $\uparrow$ 2·45

  "1^∞" ?

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$ (VOIDAAN OTTAA EKSPONENTTIFUNKTION MÄÄRITELMÄKSI)

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$$ (STIRLINGIN KAAVA, TODISTUS EI IHAN HELPPO)

ESIM. $\frac{n!}{n^n} \to 0$, KUN $n\to\infty$.

TODISTUS. $$\frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}}_{\substack{\to 1\\ \text{STIRLING}}} \cdot \overbrace{(1/e)^n\sqrt{2\pi n}}^{\to 0} \to 0, \text{ KUN } n\to\infty.$$

$$(1/e)^n\sqrt{2\pi n} = \frac{\sqrt{2\pi n} \to \infty}{e^n \to \infty}$$

"TOSI NOPEASTI"

MÄÄRITELMÄ JONO $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ON RAJOITETTU,
JOS LÖYTYY LUVUT K JA M SITEN, ETTÄ
$K \leq a_n \leq M$ KAIKILLA n,

JOS $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, NIIN LÖYTYY $N \in \mathbb{N}$ SITEN, ETTÄ

$\mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$

$|a_n - L| < 1$ ~~[illegible]~~ $\forall n \geq N$

$\Leftrightarrow L - 1 < a_n < L + 1$ ~~[illegible]~~ $\forall n \geq N$

SAATIIN: SUPPENEVA JONO ON RAJOITETTU,

KÄÄNTÄEN: RAJOITETTU JONO EI VÄLTTÄMÄTTÄ
OLE SUPPENEVA
ESIM, $(0, 1, 0, 1, \ldots)$

RIITTÄVÄ LISÄEHTO: MONOTONISUUS:
JONO LASKEVA TAI JONO NOUSEVA
$a_n \geq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ $a_n \leq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

REAALILUKUJEN TÄYDELLISYYSAKSIOOMA : NOUSEVA JA YLHÄÄLTÄ RAJOITETTU LUKUJONO SUPPENEE.

TS. JOS $a_{n+1} \geq a_n$ JA $a_n \leq M$ KAIKILLA $n \in \mathbb{N}$, NIIN

$$\exists L = \lim_{n \to \infty} a_n.$$