LASKARIVINKKI

VIIKKO 2, ALKUVIIKON 1.a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$ SUPPENEEKO/ HAJAANTUUKO

ALUKSI $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ ok, SARJA VOI SUPETA

2 TAPAA TUTKIA

1. ARVIOINTI

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

2. VERTAILU

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

SARJAA VOIDAAN TUTKIA VERTAAMALLA SARJAAN $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2 SARJAT

HUOM. TERMINOLOGIA: JONO $(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$

SARJA $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

MIKÄ ON SARJAN $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ SUMMA?

LAITTAMALLA SULUT $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$

$= 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

TAI $1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots$

$= 1 + 0 + 0 + \dots = 1,$

MÄÄRITELLÄÄN SARJAN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ SUMMA OSASUMMIEN JONON RAJA-ARVON AVULLA.

ESIM. GEOMETRINEN SARJA $a + aq + aq^2 + \dots$, $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2–3

MERK. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a q^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1}$

TARKASTELLAAN OSASUMMIEN JONOA

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + aq$$
$$\vdots$$
$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a(1 + q + \dots + q^{n-1})$$

ONKO JONOLLA $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ RAJA-ARVOA?

MERK. $Q_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} \quad \| \cdot q \neq 0$

$$q Q_n = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$\Rightarrow Q_n - q Q_n = 1 - q^n \quad \| \text{ OL. } q \neq 1$$

$$Q_n (1 - q) = 1 - q^n$$

$$\Rightarrow Q_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

2–4

NYT $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \iff |q|<1$,

JOLLOIN $\lim_{n\to\infty} Q_n = \dfrac{1}{1-q}$

SAADAAN SIIS

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a q^{k-1} = a\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \longrightarrow \frac{a}{1-q},$$ KUN $n\to\infty$ JA $|q|<1$.

$$\text{GEOM. SARJAN SUMMA} = \frac{\text{ENSIMMÄINEN TERMI}}{1 - \text{SUHDELUKU}}$$

<u>LAUSE.</u> GEOMETRINEN SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} a q^n$ SUPPENEE

JOS JA VAIN JOS $|q|<1$,

~~EX~~ ESIM. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} - \dots$ 2-5

$\cdot -\frac{1}{3} = q$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ q = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots\right)$$

$$= \frac{1/3}{1-(-1/3)} = \frac{1/3}{1+1/3} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{1+3} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

<u>YLEISEMMIN MÄÄRITELLÄÄN</u> JOS SARJAN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ OSASUMMIEN JONOLLA $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ON (ÄÄRELLINEN) RAJA-ARVO $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, NIIN SANOTAAN ETTÄ SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>SUPPENEE</u>.

MUUTOIN SARJA <u>HAJAANTUU</u>.

OMINAISUUKSIA. JOS $\sum a_n$ JA $\sum b_n$ SUPPENEVAT JA $c>0$, NIIN

$$1 + \underbrace{\underbrace{2 + 3}_{S_3} + 4}_{S_4}$$

$$4 = S_4 - S_3$$

- $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
- $\sum c a_n = c \sum a_n$
- JOS $\sum a_n$ SUPPENEE, NIIN $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

PERUSTELU. $a_n = \underset{\downarrow \atop S}{S_n} - \underset{\downarrow \atop S}{S_{n-1}} = S - S = 0$, $n \to \infty$

$$\left(S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$

HUOM. EHDOSTA $a_n \to 0$ EI SEURAA, ETTÄ $\sum a_n$ SUPPENISI. ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ HAJAANTUU. (TODISTUS KOHTA.)

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ HAJAANTUU, KOSKA

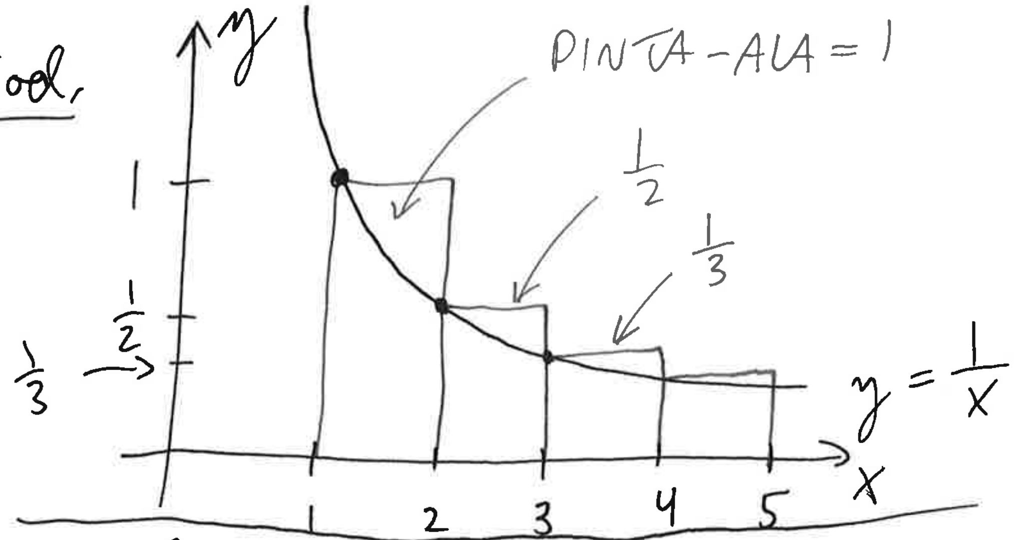
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

ESIM. HARMONINEN SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ HAJAANTUU.

(ALKEISTODISTUS WIKIPEDIASSA.)

$$= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

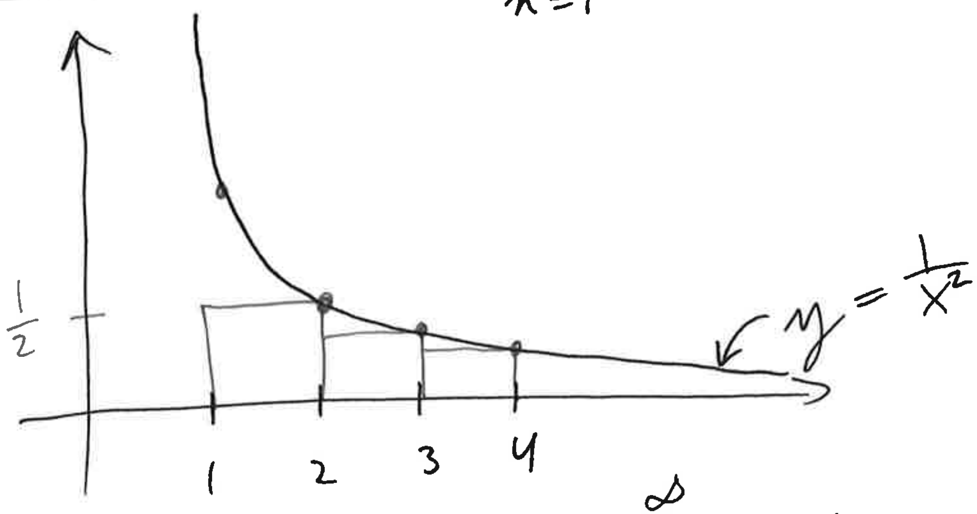
Tod.



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big/_1^{n+1} \ln(x) = \ln(n+1) - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln(n+1) \to \infty,$$

kun $n \to \infty$. $\square$

ESIM. SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ SUPPENEE,



$$0 < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\Big/_1^{\infty} \frac{1}{x} = -0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

↑ 2, KOSKA PYLVÄS $\boxed{}$ 1 PUUTTUU (leveys 1)

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2$$

S_n YLHÄÄLTÄ RAJOITETTU

S_n KASVAVA

$\Rightarrow$ S_n SUPPENEE. $\square$

YLEISTYKSENÄ SAADAAN

LAUSE. JOS $a_n = f(n)$, MISSÄ f ON VÄHENEVÄ JA POSITIIVINEN FUNKTIO, NIIN

ⓐ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ SUPPENEE $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ SUPPENEE

ⓑ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ HAJAANTUU $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ HAJAANTUU

(INTEGRAALI-SARJA VERTAILUTESTI)

HUOM. YLLÄ EHTO "VÄHENEVÄ JA POSITIIVINEN" RIITTÄÄ JOSTAIN PISTEESTÄ ALKAEN.

ESIM. YLEISESTI SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (*)

- KUN ~~$p \neq 0$~~ $p = 0$, NIIN $\frac{1}{n^p} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$, KUN $n \to \infty$

  KUN $p = -q$, $q > 0$, $\frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{-q}} = n^q \rightarrow \infty \neq 0$, KUN $n \to \infty$.

  SIIS $p \leq 0 \Rightarrow$ SARJA (*) HAJAANTUU.

- KUN $p > 0$, VERTAAMALLA INTEGRAALIIN $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

  SAADAAN (*) SUPPENEE, KUN $p > 1$, $\longrightarrow \left[\int \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{p-1} \right]$

  HAJAANTUU, KUN $p \leq 1$.

LAUSE. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ SUPPENEE $\Longleftrightarrow p > 1$

TULOSTA VOI KÄYTTÄÄ VERTAILUTESTEISSÄ:

MAJORANTTI PERIAATE JOS $|a_n| \le b_n$ JA $\sum b_n$ SUPPENEE, NIIN $\sum a_n$ SUPPENEE. $(b_n \ge 0)$

MINORANTTI PERIAATE JOS $0 \le b_n \le a_n$ JA $\sum b_n$ HAJAANTUU, NIIN $\sum a_n$ HAJAANTUU.

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ SUPPENEE, KUN $|x| \le 1$, SILLÄ

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{JA} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ SUPPENEE.}$$

SARJA HAJAANTUU, KUN $|x| > 1$, SILLÄ $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \to \infty \neq 0$, KUN $n \to \infty$

PERUSTELU RAJA-ARVOLLE

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} e^{\ln|x|^n}$$

$$= \frac{1}{n^2} e^{n \underbrace{\ln|x|}_{>0,\ |x|>1}} \longrightarrow \infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

LAUSE. ~~[illegible]~~ OLKOON $a_n > 0$ JA $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

OLETETAAN, ETTÄ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ JA $0 < c < \infty$,

TÄLLÖIN

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ SUPPENEE} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ SUPPENEE},$$

TODISTUS. PÄTEE $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c b_n} = \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{c} \cdot c = 1$.

VALITAAN $\varepsilon = \frac{1}{2}$. LÖYTYY $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ SITEN, ETTÄ

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{c b_n} < 1 + \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_n}{c b_n} < \frac{3}{2} \quad \Big\| \cdot c b_n \quad n \geq N_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} c \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} a_n \leq \frac{3}{2} c \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} b_n}$$

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^3+n+2}$ (*) $\leftarrow$ KUIN $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-5}{n^3+n+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5n^2}{n^3+n+2} = 1.$$

KOSKA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ SUPPENEE, NIIN (*) SUPPENEE.

ARVATAAN NÄIN KOSKA ~~...~~ KUN $x \approx 0$ $\sin x \approx x$

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin \frac{1}{n}}_{=a_n}$ (**) VALITAAN $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{ KUN } n\to\infty.$$

KOSKA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ HAJAANTUU, NIIN (**) HAJAANTUU.