YHTEENVETOA JA ENNAKKOTIETOA, VIIKOT 1–3

$\boxed{3-1}$

VIIKKO 1

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SARJA}}}{S_n = \sum_{k=0}^{n} a q^n} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OSASUMMIEN-} \\ \text{JONO}}}{a \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \to \frac{a}{1-q}, \text{ KUN } n \to \infty,$$

JOS $|q| < 1$.

VIIKKO 2 LISÄÄ SARJOJA, JOISSA SUMMATAAN LUKUJA

VIIKKO 3 SARJOJA, JOISSA ON MUUTTUJA X.

ESIM.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \text{KUN } |x| < 1 \quad \Big\| \int$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) \approx x, \quad \text{KUN } x \approx 0 \quad \| x = -t$$

$$\Rightarrow \underline{\ln(1+t) \approx t}, \quad \text{KUN } t \approx 0$$

ESIM. TILILLÄ ON 1000€, VUOSIKORKO 2%.
MONENKO VUODEN PÄÄSTÄ 2000€?

RATK. $1{,}02^n \cdot \cancel{1000€} = \cancel{2000€}\ 2 \quad \| \ln(\ )$

$\Rightarrow \ln(1{,}02^n) = \ln 2$

$\Rightarrow \quad n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx \dots$

$\uparrow$ LASKIN

$\ln(1+x) \approx x$

$\Rightarrow \quad n = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)} \approx \dfrac{\overset{0{,}7}{\ln 2}}{\frac{p}{100}} = \dfrac{70}{p} = \dfrac{70}{2} = 35$

$p = 2$

$$\boxed{n = \frac{70}{p}}$$

V: 35 VUODEN KULUTTUA

ITSEISESTI SUPPENEVAT SARJAT

MÄÄRITELMÄ. JOS SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ SUPPENEE, NIIN SANOTAAN, ETTÄ SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ SUPPENEE ITSEISESTI.

ITSEISESTI SUPPENEVA SARJA SUPPENEE.

PERUSTELO. PÄTEE $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ (MAJORANTTIPERIAATE)

KOSKA $\sum 2|a_n|$ SUPPENEE, MYÖS $\sum (a_n + |a_n|)$ SUPPENEE.

$$\Rightarrow \sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

SUPPENEE KAHDEN SUPPENEVAN SARJAN EROTUKSENA.

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}_{=a_n}$ SUPPENEE ITSEISESTI SUPPENEVANA SARJANA, KOSKA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=|a_n|}$$ SUPPENEE.

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ EI SUPPENE ITSEISESTI

(JOS LISÄTÄÄN ITSEISARVOT, TULEE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, MIKÄ HAJAANTUU.)

SARJA SUPPENEE KUITENKIN ILMAN ITSEISARVOJA (PERUSTELLAAN KOHTA), SIIS SARJA SUPPENEE EHDOLLISESTI.

SUHDETESTI. GEOMETRISELLE SARJALLE $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ SUHDE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{aq^{n+1}}{aq^n} = q = \text{VAKIO} \; (<1 \text{ KUN SUPPENEE}).$$

MONILLE SARJOILLE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to$ VAKIO, KUN $n \to \infty$.

SAADAAN,

LAUSE. JOS SARJALLE $\sum a_n$ PÄTEE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$

NIIN TAPAUKSESSA

ⓐ $L < 1$: SARJA $\sum a_n$ SUPPENEE

ⓑ $L > 1$: SARJA $\sum a_n$ HAJAANTUU (MYÖS TAPAUS $L = \infty$)

ⓒ $L = 1$: TESTI EI KERRO SUPPENEMISESTA/HAJAANTUMISESTA.

TOD (IDEA) OLETETAAN $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L < 1$ JA $L < x < 1$,

RIITTÄVÄN SUURILLA $n \geq k$ PÄTEE $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < x$,

$$\Rightarrow \underbrace{|a_{k+1}| < |a_k| x},$$

$$\Rightarrow |a_{k+2}| < |a_{k+1}| x < |a_k| x^2$$

$$\Rightarrow |a_{k+i}| < |a_k| x^i,$$ KAIKILLA $i = 0, 1, 2, \ldots$

MAJORANTTIPERIAATE $\Rightarrow$

$\sum_{i=0}^{\infty} |a_{k+i}|$ SUPPENEE, KOSKA $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|a_k|}_{=\text{VAKIO}} x^i$ SUPPENEE

EI RIIPU INDEKSISTÄ i.

ESIM. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ SUPPENEE, SILLÄ:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \cancel{\frac{(n+1)!}{}} \quad \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!} \cdot 1}{(n+1) \cdot \cancel{n!}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \to L = 0 < 1, \text{ KUN } n \to \infty.$$

ESIM. SUHDETESTI EI NÄE SARJAN $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ HAJAANTUMISTA,

SILLÄ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} \to 1$, KUN $n \to \infty$.

ESIM. ENTÄ SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, JOLLE MYÖS

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \to 1$, KUN $n \to \infty$?

TÄMÄ SUPPENEE, SILLÄ PÄTEE.

VUOROTTELEVIEN SARJOJEN SUPPENEMISTESTI

MUOTOA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ OLEVA SARJA SUPPENEE, JOS

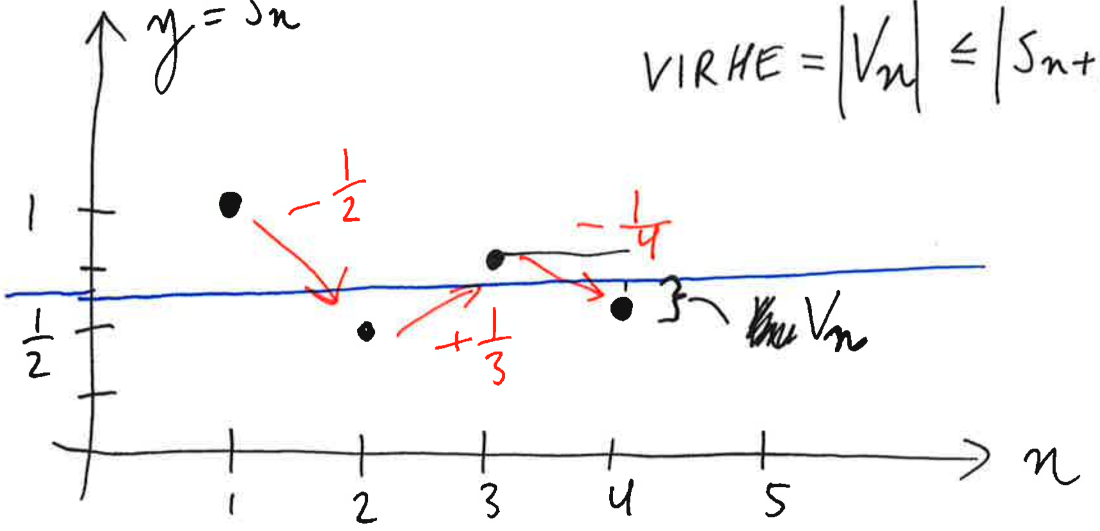
- $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \leftarrow$
- $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \leftarrow$
- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

TAI $n \geq N$ JOLLAKIN $N \in \mathbb{N}$ RIITTÄÄ MYÖS

ESIMERKKI (TODISTUKSEN IDEA.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{S_1} - \frac{1}{2}}_{S_2} + \frac{1}{3}}_{S_3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\text{VIRHE} = |V_n| \leq |S_{n+1} - S_n|$$



LÄHESTYTÄÄN JOTAKIN ARVOA,
VÄLILLÄ ALAPUOLELLA,
VÄLILLÄ YLÄPUOLELLA,
LÄHESTYTÄÄN KOKO AJAN,

TODISTUS (KAAVOILLA)

$S_1 = a_1 > 0$

$S_1 > S_2 = a_1 - a_2 > 0$

$> S_4 >$

$\underline{S_1} > S_3 = a_1 - a_2 + a_3 > S_2$ ~~$S_4 > S_6$~~

SIIS $(S_1, S_3, S_5, \dots)$ ON LASKEVA JONO JA

$(S_2, S_4, S_6, \dots)$ ON NOUSEVA JONO.

KUMMALLAKIN ON RAJA-ARVO (L_1 JA L_2)

KOSKA $|a_{n+1} - a_n| \to |0 - 0| = 0$, NIIN

RAJA-ARVOT $L_1 = L_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

VIRHEARVIO $\left| \underset{\overset{\uparrow}{\text{SARJAN SUMMA}}}{S} - S_n \right| < \left| S_{n+1} - S_n \right| = a_{n+1}$

(VIIKKO 2, PALAUTETTAVAT 6.)

ESIM. SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ SUPPENEE, OLKOON SEN

SUMMA S. MILLOIN

$$|S - S_n| < 0{,}01 \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$|S - S_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < 0{,}01(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1) > \frac{1}{0{,}01} = 100$$

$$\Leftrightarrow \quad n > 99$$

$$\Rightarrow \quad n = 100.$$

POTENSSISARJAT

OPITAAN TUTKIMAAN MILLOIN ESIM.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n^2}(x-5)^n$$ SUPPENEE.

- TAPA 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{x-5}{2}\right)^n$$

SUPPENEE AINAKIN, JOS

$$\left|\frac{x-5}{2}\right| < 1$$

$$\iff |x-5| < 2$$

$$\iff 3 < x < 7$$

- TAPA 2

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underset{2}{\frac{\cancel{2^{n+1}}}{\cancel{2^{n}}}} \cdot \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{\to 1} = 2$$

ESIM. GEOMETRINEN SARJA $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ ON **POTENSSISARJA**, JOKA SUPPENEE VÄLILLÄ $x \in (-1,1)$ JA SEN SUMMA ON $\frac{a}{1-x}$.

YLEISEMMIN. "MUUTTUJAN $x \approx \underset{\uparrow \text{ KEHITYSKESKUS}}{x_0}$ SUHTEEN" SUHTEEN KEHITETTY POTENSSISARJA ON MUOTOA

$$\circledast \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots,$$

TÄMÄ SUPPENEE NIILLÄ $x \in \mathbb{R}$, JOILLA OSASUMMIEN JONOLLA $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$ ON RAJA-ARVO,

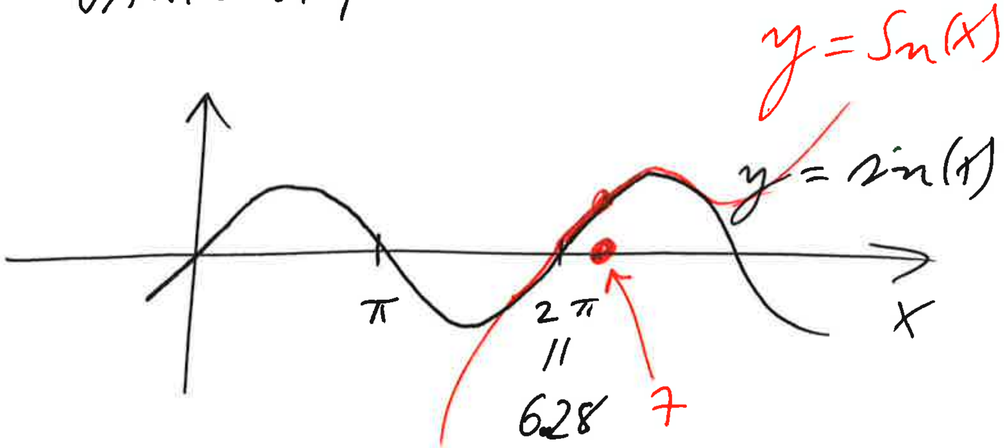
HUOM.
- KERTOIMET c_n VAKIOITA (EIVÄT RIIPU x:STÄ)
- x_0 = VAKIO
- x MUUTTUJA

ESIM. KEHITÄ SIN(X) POTENSSISARJAKSI PISTEEN 7 LÄHELLÄ,

TOISIN SANOIN, ETSITÄÄN ESITYS

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-7)^n, \quad C_n \text{ VAKIOITA,}$$

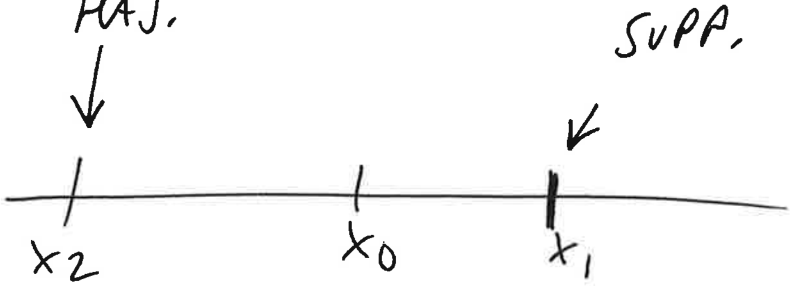
$$\sin(x) \approx S_n(x)$$ ↑POLYNOMI



ABELIN LAUSE:

- JOS SARJA $\circledast$ SUPPENEE, KUN $x = x_1$, NIIN SE SUPPENEE KAIKILLA x JOILLE PÄTEE $|x - x_0| < |x_0 - x_1|$,
- SARJA HAJAANTUU PISTEESSÄ x_2, NIIN SARJA HAJAANTUU KAIKILLA x JOILLE PÄTEE $|x - x_0| > |x_0 - x_2|$,

ESIM. ~~[illegible]~~



$\Rightarrow$