POTENSSISARJA

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

c_n: KERTOIMIA = VAKIOITA

x: MUUTTUJA

x_0: KEHITYSKESKUS = VAKIO

ABELIN LAUSE

(2) (*) HAJAANTUU, KUN $x = x_2$

$|x - x_0| > |x_2 - x_0|$ $\Rightarrow$ (*) HAJAANTUU ARVOLLA x

(1) (*) SUPPENEE, KUN $x = x_1$

$|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ $\Rightarrow$ (*) SUPPENEE ARVOLLA x

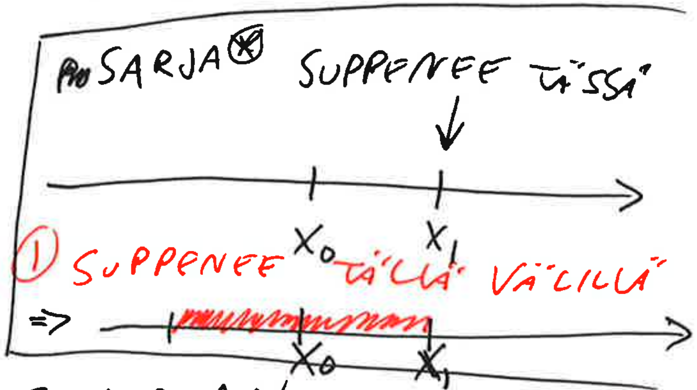
SUOMEKSI: SARJA SUPPENEE SITÄ PAREMMIN, MITÄ LÄHEMPÄNÄ MUUTTUJA ON KEHITYSKESKUSTA

TODISTUS (1) (*) SUPPENEE, KUN $x = x_1 \Rightarrow$

$C_n(x_1 - x_0)^n \to 0$, KUN $n \to \infty$

OLKOON $M > 0$ JOKIN LUKU. LÖYTYY $N_M \in \mathbb{N}$ JOLLE

$|C_n(x_1 - x_0)^n| < M$ KAIKILLA $n \geq N_M$



$\Rightarrow |C_n| < \dfrac{M}{|x_1 - x_0|^n}$ KUN $n \geq N_M$

SARJAN $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ TERMEILLE SAADAAN

$$\Rightarrow |C_n(x - x_0)^n| \leq \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}|x - x_0|^n = M\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n$$ KUN $n \geq N_M$

LUENNOITSIJA PARANTAA FONTTIA! JATKOSSA

NYT $|x - x_0| < |x_1 - x_0| \Rightarrow$

$$\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| < 1$$

SIIS SARJALLA (*) ON ~~SUPPENEVA~~ MAJORANTTINA SUPPENEVA GEOMETRINEN SARJA $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n$

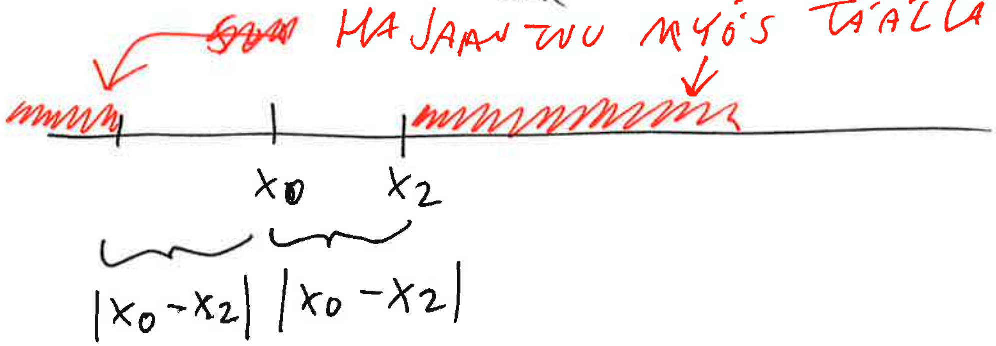
$\Rightarrow$ (*) SUPPENEE.

(2) JOS (*) HAJAANTUU, KUN $x = x_2$, NIIN SEN TÄYTYY HAJAANTUA KAIKILLA $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$,

~~[illegible]~~ SILLÄ JOS SARJA (*) SUPPENISI JOLLAKIN TÄLLAISELLA LUVULLA x, NIIN

(1) $\Rightarrow$ SARJA SUPPENEE MYÖS ARVOLLA x_2, TULISI RISTIRIITA. □

(2) $\Rightarrow$



TODISTUKSEN PERUSTEELLA POTENSSISARJA SUPPENEE MYÖS ITSEISESTI VÄLILLÄ $(x_0 - |x_1 - x_0|, x_0 + |x_1 - x_0|)$ 4-4

TEHTÄVÄNÄ ON NYT LÖYTÄÄ SUURIN $R > 0$ SITEN, ETTÄ ⊛ SUPPENEE VÄLILLÄ $(x_0 - R, x_0 + R)$.

TÄMÄ ON POTENSSISARJAN SUPPENEMISVÄLI JA R ON SUPPENEMISSÄDE.

HUOM. VOI OLLA

1. $R = 0$ $\Rightarrow$ SARJA SUPPENEE VAIN KEHITYSKESKUKSESSA $x = x_0$. (KAIKKI SUMMATTAVAT $C_n (x - x_0)^n$ NOLLIA)

2. $0 < R < \infty$ $\Rightarrow$ SARJA SUPPENEE VÄLILLÄ $(x_0 - R, x_0 + R)$

3. $R = \infty$ $\Rightarrow$ SARJA SUPPENEE KAIKILLA $x \in \mathbb{R}$.

ESIM. ① $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-x_0)$ $R=0$

KASVAA NOPEASTI

② $\sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot(x-x_0)^n$ $R=1$ ~~[illegible]~~ EHTO $|x-x_0|<R=1$

VAKIO

$\Rightarrow$ GEOM. SARJA

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-x_0)^n$ $R=\infty$

MENEE NOLLAAN NOPEASTI

VIIKKO 3
TAULUTEHTÄVÄ 1

$R=?$ YRITETÄÄN SUHDETESTILLÄ JA OLETETAAN, ETTÄ SARJALLE $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, MERK. $a_n = c_n(x-x_0)^n$, PÄTEE

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

TÄLLÖIN $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x-x_0| \to L,$

KUN $n \to \infty$,

ELI $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \frac{L}{|x-x_0|} = M$, KUN $n \to \infty$, (4-6)

JOS $M|x-x_0| = L < 1$

SUHDETESTI $\Rightarrow$ SARJA (*) SUPPENEE,

$\Rightarrow$ SARJA SUPPENEE NIILLÄ x, JOILLE PÄTEE

$$|x-x_0| < \underbrace{\frac{1}{M}}_{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

SAATU TULOS

LAUSE, JOS SARJALLE $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ PÄTEE

$\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$, NIIN SARJA SUPPENEE VÄLILLÄ (x_0-R, x_0+R)

JA HAJAANTUU VÄLEILLÄ $(-\infty, x_0-R)$ JA (x_0+R, ∞)

HUOM. PISTEET $x_0 - R$ JA $x_0 + R$ ON TUTKITTAVA ERIKSEEN

4-7

ESIM. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}}_{c_n} (x-1)^n \quad (*)$$

$$\cancel{\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} \quad \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)\,3^{n+1}}{n \cdot 3^n} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \cdot 3 \to 3 = R, \text{ KUN } n \to \infty.$$

SARJA (*) SUPPENEE SIIS ARVOILLA $x \in (-2, 4)$
$$\uparrow_{1-3} \quad \uparrow_{1+3}$$

JA HAJAANTUU ARVOILLA $x < -2$ JA $x > 4$.

PISTEET $x = -2$ JA $x = 4$ TÄYTYY TUTKIA ERIKSEEN.

$x = 4$ $$a_n = (-1)^{n-1} \frac{(4-1)^n}{n \cdot 3^n} = (-1)^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} \to 0, \text{ KUN } n \to \infty$$

SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ SUPPENEE VUOROTTELEVANA SARJANA.

4-8

$x = -2$ $\quad b_n = (-1)^{n-1} \dfrac{(-2-1)^n}{n \cdot 3^n} = (-1)^{n-1} \dfrac{(-1)^n \cdot 3^n}{n \cdot 3^n}$

$= (-1)^{2n-1} \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n}$

NEGATIIVINEN HARMONINEN SARJA

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ HAJAANTUU,

SIIS SARJA (*) SUPPENEE $\iff x \in (-2, 4]$

HAJAANTUU $\iff x \leq -2$ TAI $x > 4$

LAUSE (TODISTUS & ESIMERKKI EHKÄ MYÖHEMMIN) DERIVOITU / INTEGROITU

POTENSSISARJA SUPPENEE / HAJAANTUU

~~SAMASSA~~ SAMOILLA MUUTTUJAN x ARVOILLA

KUIN ALKUPERÄINEN SARJA.

FUNKTIOT

LUENTODIOISSA & PEKAN VIDEOISSA ON PALJON ASIAA, TÄSSÄ YDINASIAT.

4-9

YLEISTÄ

$f : A \to B$ FUNKTIO, $f(x) = \ldots$

$A = M_f$ = f:N MÄÄRITTELYJOUKKO

B = MAALIJOUKKO

$fA = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset B$ ON f:N ARVOJOUKKO ELI KUVAJOUKKO

ESIM. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \geq 0$

$M_f = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R}$

$fA = [0, \infty)$ KUVAJOUKKO

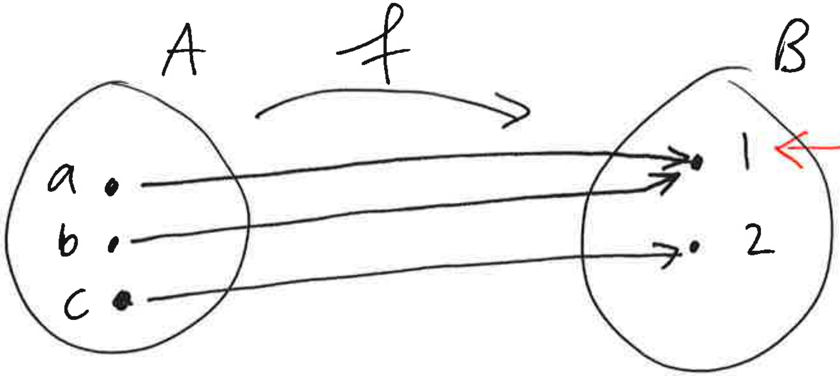
$f^{-1} C = \{ a \in A \mid f(a) \in C \}$ C:N ALKUKUVAJOUKKO

f INJEKTIO: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (ERI MUUTTUJAN ARVOILLA TÄYTYY SAADA ERI ARVOT)

f SURJEKTIO: $\forall y \in B \ \exists x \in A$ SITEN, ETTÄ $f(x) = y$

~~19/10~~

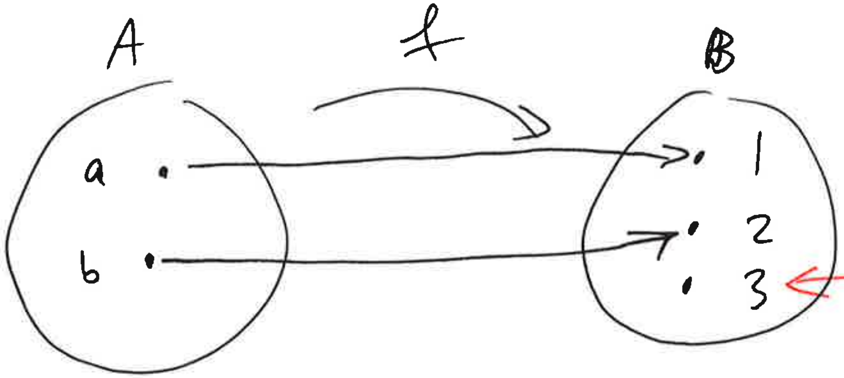
4-10



f EI INJEKTIO

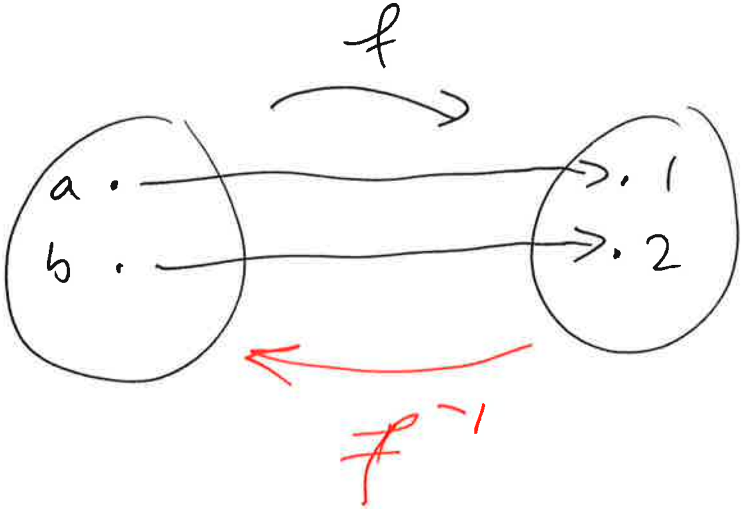
KAIKILLE $y \in B$ KUVAUTUU JOTAIN

$\Rightarrow$ f ON SURJEKTIO



f EI SURJEKTIO, KOSKA $f(x) = 3$ EI TOTEUDU MILLÄÄN $x \in A$.

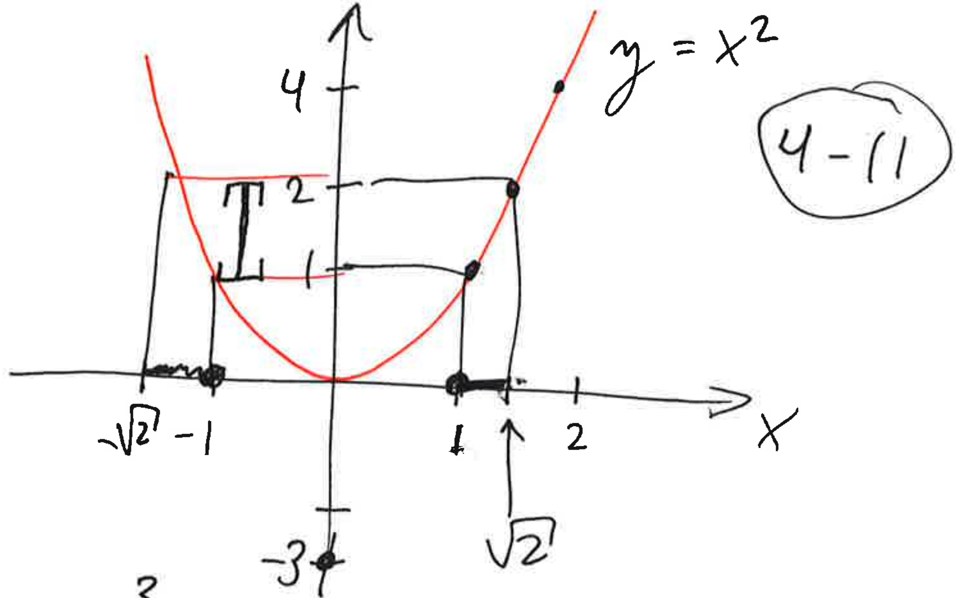
f ON INJEKTIO



f INJEKTIO
f SURJEKTIO

SANOTAAN f ON BIJEKTIO

ESIM. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



- $f^{-1}[1,2] = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$
- f EI OLE INJEKTIO

  $f(1) = 1 = f(-1)$

  VAIKKA $1 \neq -1$
- f EI OLE SURJEKTIO, KOSKA $-3 \in B = \mathbb{R}$,

  MUTTA $f(x) \neq 3$ KAIKILLA $x \in A = \mathbb{R}$.

JATKUVUUS

JATKUVUUDESTA VOIDAAN PUHUA VAIN SELLAISESSA PISTEESSÄ, JOKA KUULUU FUNKTION MÄÄRITTELYJOUKKOON.