EXTRA 6-1

TÄMÄ SIVU ON EXTRAA, KENNON ALUSSA TULI KYSYMYS LASKARITEHTÄVÄSTÄ SIVUN VOI OHITTAA

$\sin(2x)$

1. TAULUKKO
2. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ HYVÄ!
3. EKSPONENTTIFUNKTION AVULLA → TARVITAAN LOPPUKURSSISSA

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k y^{3-k}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!}$$

(1) KÄYTTÄÄ KAAVAA, JOS MUISTAA / LÖYTÄÄ TMS

(2) $\sin(2x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$

$= 2 \sin x \cos x$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\cos x}_{\to 1} = 2.}$$

TEHTÄVÄ ONNISTUU MYÖS L'HOSPITAL TAI SININ SARJAKEHITELMÄ

(3) VÄHÄN HAASTAVA

EULER: $\cos x + i \sin \cancel{y}x = e^{i \cancel{y}x}$ ← KOMPLEKSILUKU ? $\boxed{\text{EXTRA 6-2}}$

$$\underline{\underline{\cos(2x)}} + i \, \underline{\sin(2x)} \overset{\text{EULER}}{=} e^{i2x}$$

$$= \left(e^{ix}\right)^2$$

$$\overset{\text{EULER}}{=} (\cos x + i \sin x)^2$$

$$= (\cos x)^2 + 2i \sin x \cos x + \underline{(i \sin x)^2}$$

$$= \underline{\underline{(\cos x)^2 - (\sin x)^2}}$$

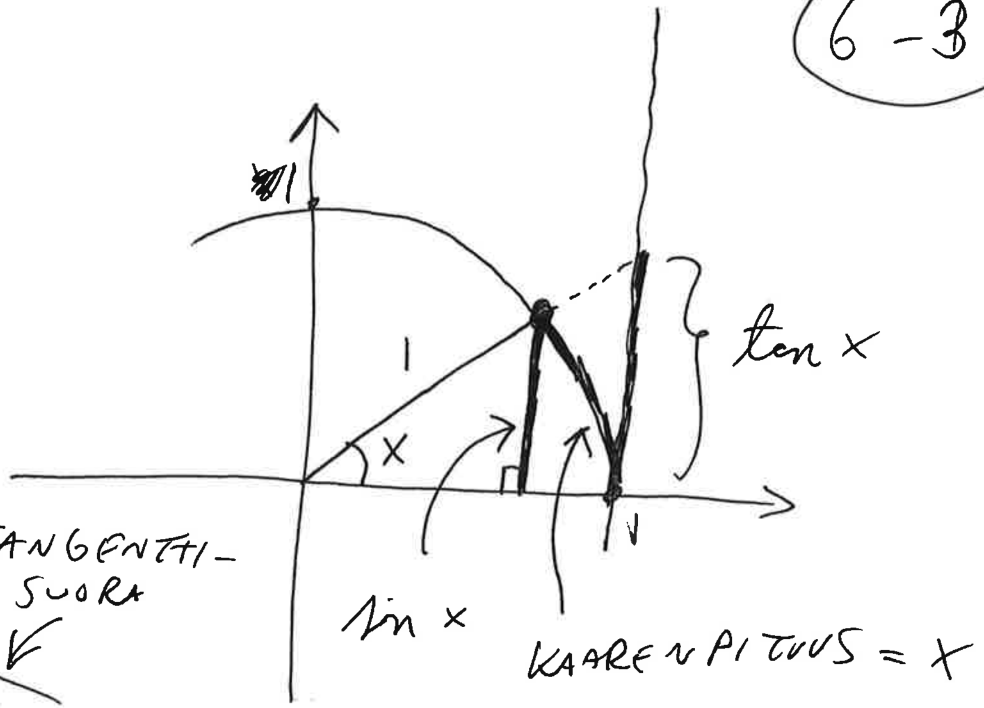
$$+ 2i \, \underline{\sin x \cos x}$$

$$(i \sin x)^2 = i^2 (\sin x)^2 = -1 \cdot (\sin x)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 \\ \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

LAUSE. $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$

APUTULOS 1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



SYY JOS $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, NIIN

$ALA_1 \leq ALA_2 \leq ALA_3 \quad \| : \tfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x \cos x \leq x \leq \tan x$

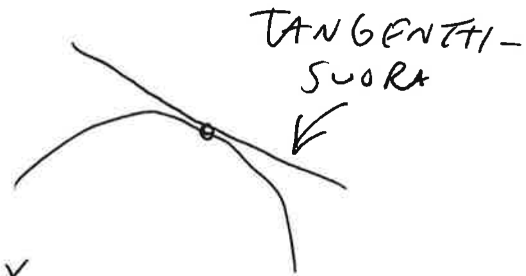
$\Rightarrow \sin x \cos x \leq x \leq \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \| : \sin x$

$\Rightarrow \cos x \leq \dfrac{x}{\sin x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$

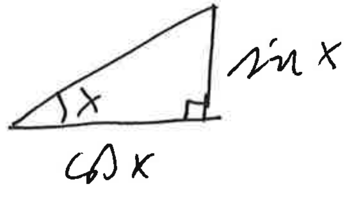
$\cos x \to 1$, $\quad \dfrac{1}{\cos x} \to \dfrac{1}{1} = 1$

SUPPILOPERIAATE $\Rightarrow$

$\lim_{x \to 0+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$



PIKKUKOLMIO



$ALA_1 = \dfrac{1}{2} \sin x \cos x$

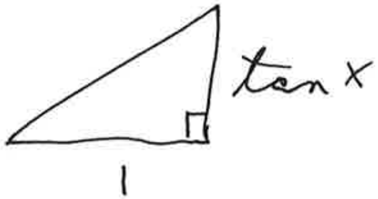
SEKTORI

$ALA_2 = \dfrac{x}{2\pi} \pi \cdot 1^2$

TÄYSI KIERROS

$= \dfrac{1}{2} x$

ISO KOLMIO



$ALA_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$
$= \dfrac{1}{2} \tan x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

6-4

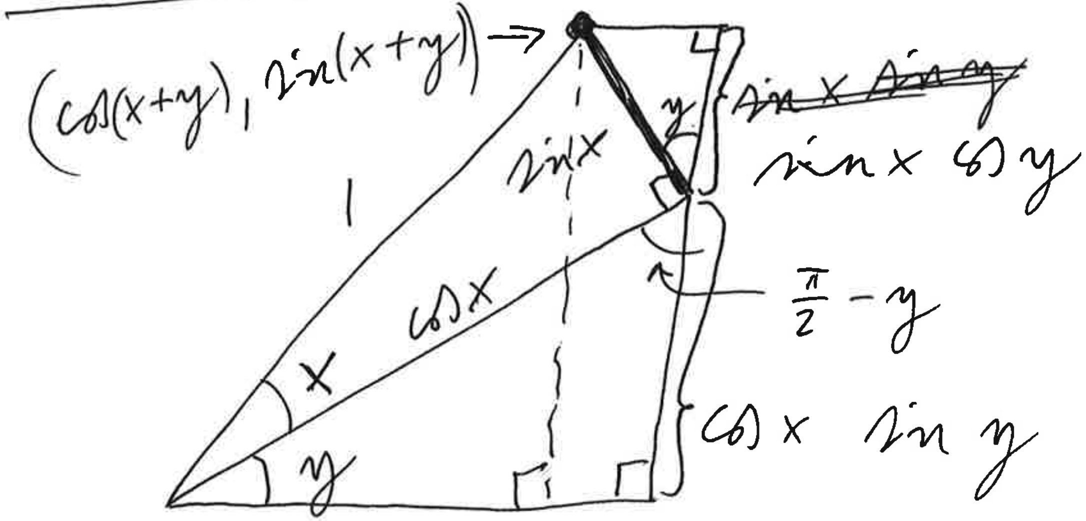
SAMA

SAMOIN $\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$

SIIS $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

APUTULOS 2.

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$



VERRATAAN y-KOORDINAATTEJA $\Rightarrow$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

6-5

RAJA-ARVO KUN $h \to 0$ ON $\frac{d}{dx}\sin x$.

TODISTUS. $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

$$= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \cos(x)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} + \sin(x)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0,} \to \cos(x), \text{ kun } h \to 0.$$

KOSKA...

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(\cos(h)+1)} = \frac{(\cos(h))^2 - 1}{h(\cos(h)+1)}$$

$$= -\sin^2 h \frac{1}{h(\cos h + 1)}$$

$$= -\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{\cos h + 1}}_{\to \frac{0}{2} = 0} \to 1 \cdot 0 = 0, \text{ kun } h \to 0$$

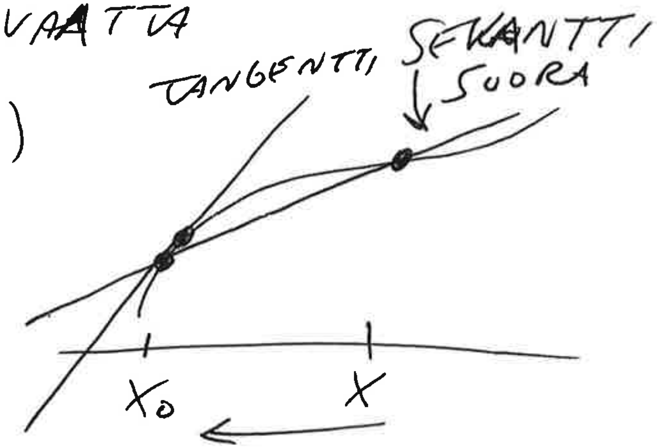
$$\boxed{\begin{gathered}\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \Rightarrow \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x\end{gathered}}$$

DERIVAATTA ON • FUNKTION KUVAAJAN KULMAKERROIN (GEOMETRINEN MÄÄRITELMÄ)

6-6

• HETKELLINEN NOPEUS ON KESKINOPEUDEN RAJA-ARVO KUN $\Delta t \to 0$ (FYSIKAALINEN MÄÄRITELMÄ).

NOPEUS ON MATKAN ~~DERI~~ AIKADERIVAATTA



⇒ KAAVOJA:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

TANGENTIN KULMAKERROIN

SEKANTIN KULMAKERROIN

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(SIJOITTAMALLA $x - x_0 = h$
$x = x_0 + h$)

HETKELLINEN-NOPEUS

$x(t)$ = PAIKKA, t = AIKA

$$v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

KESKINOPEUS VÄLILLÄ $t \ldots t + \Delta t$

MERKINTÖJÄ

6-7

$$f'(x_0) = D\,f(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

TOINEN DERIVAATTA

$$f''(x_0) = D\,D\,f(x_0) = D_2\,f(x_0) = \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

DERIVOINTIKAAVOJA

$$D\,x^n = n x^{n-1}, \quad n \neq 0$$

$$D \text{ VAKIO} = 0$$

$$\begin{cases} D \sin x = \cos x \\ D \cos x = -\sin x \end{cases}$$

"JOS KOSAHTAA, SE ON MIINUS SINULTA"

$$D\big(f(x)\,g(x)\big) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$ TULON DERIVAATTA

$$D\,\frac{f(x)}{g(x)} = D\,f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

$$D\, f(g(x)) = \cancel{f'(x)}\ f'(g(x))\, g'(x)$$

YHDISTETYN FUNKTION DERIVOINTIKAAVA ELI KETJUSÄÄNTÖ

6–8

$$(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \leftarrow$$ f' LASKETTUNA PISTEESSÄ $f^{-1}(x)$

ESIM. $$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{d}{dx}(g(x))^{-1}$$

$$= (-1)\, g(x)^{-1-1} \cdot g'(x)$$

$$= -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)$$

$$\boxed{x + x^3 = y}$$

RATKAISE x ⇒ SAAT LAUSEKKEEN f^{-1}:LLE

ESIM. $f(x) = x + x^3$ ON AIDOSTI KASVAVA $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

⇒ $f^{-1}(x)$ KÄÄNTEISFUNKTIO ON OLEMASSA MUTTA LAUSEKE ON VAIKEA

$f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$

$f'(x) = 1 + 3x^2$

$f'(1) = 4$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

ESIM. $\frac{d}{dx} x^4$ KOLMELLA TAVALLA

- SUORAAN $\frac{d}{dx} x^4 = 4x^3$

- TULON DERIVOINNILLA

$$\frac{d}{dx} x^4 = \frac{d}{dx} x \cdot x^3 = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2$$
$$= x^3 + 3x^3 = 4x^3$$

- KETJUSÄÄNNÖLLÄ $\frac{d}{dx} x^4 = \frac{d}{dx} (x^2)^2 = 2(x^2)^1 \cdot 2x$

$$= 2x^2 \cdot 2x$$
$$= 4x^3$$

SAMA

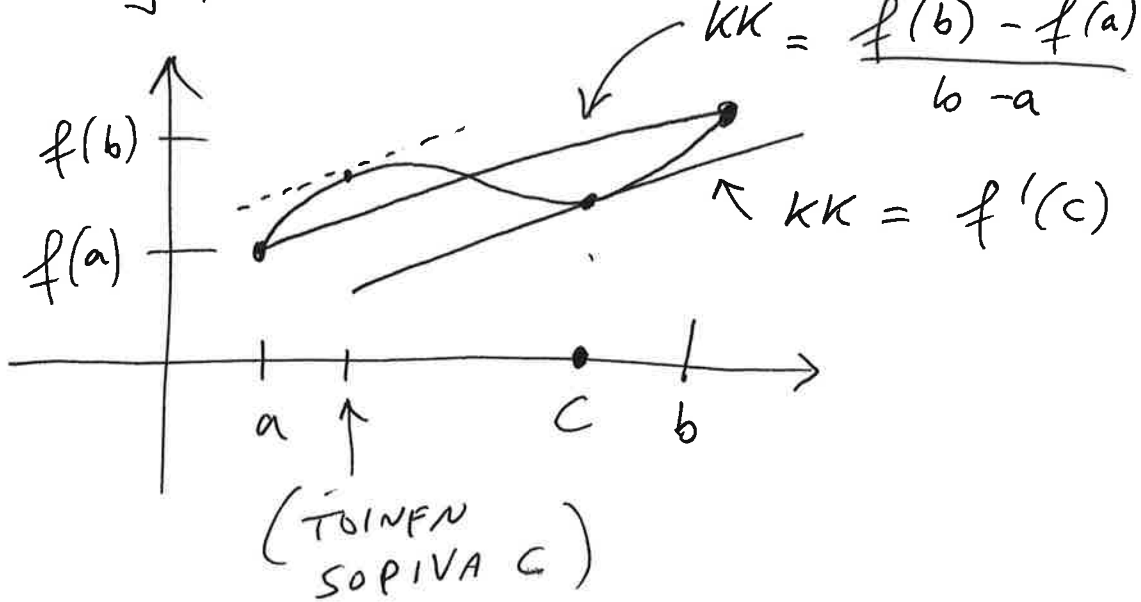
HÖLMÖJÄ LASKUJA,
MUTTA HYVÄÄ HARJOITUSTA

DERIVAATTAAN LIITTYVIÄ TULOKSIA

6 - 10

VÄLIARVOLAUSE OLKOON $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ JATKUVA JA LISÄKSI DERIVOITUVA VÄLILLÄ $]a,b[$, SILLOIN ON OLEMASSA $c\in\,]a,b[$, JOLLE

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



PERUSSOVELLUKSIA

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \quad \| \, b = x$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

~~...~~ SAATIIN FUNKTIOLLE $f(x)$ LINEAARINEN APPROKSIMAATIO

6-11

ESIM. ANNA YLÄRAJA LUVULLE $\sin(0{,}1)$

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x) \\ f'(x) = \cos(x) \\ f(0) = 0 \quad [a=0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(0) + f'(c)\,(x-0)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x) \le \sin(0) + \underbrace{\cos(c)}_{\le 1}\,(x-0)$$

$$\le 0 + 1\cdot(x-0) = x$$

$$\Rightarrow \quad \sin(0{,}1) \le 0.1$$

ESIM. ANNA YLÄRAJA LUVULLE $e^{0.1}$

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\underset{a}{0} < c < \underset{b}{0{,}1}$$

$$f(x) = f(0) + f'(c)(x-0)$$

$$\Rightarrow e^x \le e^0 + e^c(x-0)$$

$$1 = e^0 < e^c < e^1 \approx 2{,}72$$

$$\text{SIIS } e^c \le 2{,}72$$

$$\Rightarrow e^{0.1} \le 1 + 2{,}72(0.1-0)$$

$$= 1 + 0{,}272$$

$$= 1.272$$

VÄLIARVOLAUSEEN PERUSTEELLA SAADAAN

6 - 13

- YKSINKERTAISIA (?) ARVIOITA
- TULOS: DERIVOITUVA FUNKTIO ON JATKUVA

SYY $\quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Rightarrow |f(b)-f(a)| = |f'(c)|\,|b-a|$$

$$\Rightarrow |f(a_n)-f(a)| = |f'(c)|\,\underbrace{|a_n-a|}_{\to 0}, \text{ kun } a_n \to a.$$

SUPPILOPERIAATE $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

KAIKILLE JONOILLE a_n, JOILLE

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$,

$\Rightarrow f$ JATKUVA PIST. a

- L'HOSPITAL
- TAYLORIN POLYNOMI

L' HOSPITAL

OLKOON $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, JOLLOIN (6-14)

RAJA-ARVO $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ ON MUOTOA "$\frac{0}{0}$".

OLETETAAN, ETTÄ $f'(x)$ JA $g'(x)$ OVAT OLEMASSA PISTEEN x_0 LÄHELLÄ.

JOS RAJA-ARVO $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ON OLEMASSA, NIIN

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

SYY (OLET. f' JA g' JATKUVIA) VÄLIARVOLAUSE $\Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0 \text{ OLETUS}}}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_1)(x-x_0)}{g'(c_2)(x-x_0)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

KUN $x \to x_0$.

(TÄSSÄ $c_1, c_2 \to x_0$, KUN $x \to x_0$, KOSKA VÄLIARVOLAUSEESSA $x_0 < c_1 < x \to x_0$, $x_0 < c_2 < x \to x_0$.)

ESIM. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ ON MUOTOA "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

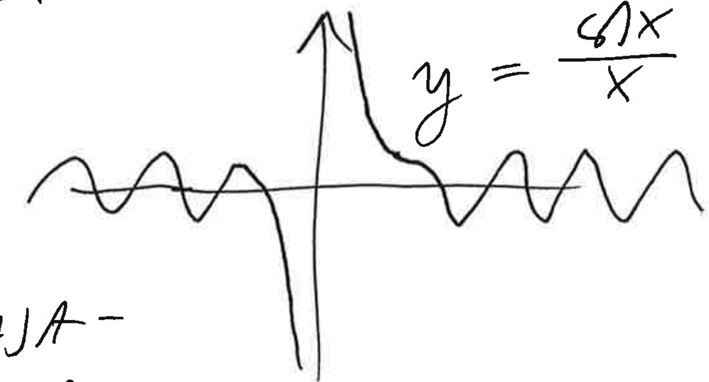
ESIM. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ MUOTOA "$\frac{0}{0}$"

$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ← -1

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2x}}{\cancel{2x}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

MUISTA TARKISTAA LAUSEEN EHDOT (MUOTOA "$\frac{0}{0}$"), MUUTEN MENEE VÄÄRIN

$y = \frac{\cos x}{x}$



$$0 \neq \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}}_{\text{EI RAJA-ARVOA / HAJAANTUU}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{1} = 0$$

L'HOSPITAL (MUOTO $\frac{\infty}{\infty}$)

6 – 16

OLETUS $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ MUOTOA $\frac{\infty}{\infty}$

POHDITTIIN L'H KAAVAN PÄTEVYYTTÄ ERI TILANTEISSA. EI OSATTU TODISTAA, ETTÄ TOIMII.

TOIMIIKO L'H ?

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right) \to 0}{\left(\frac{1}{f(x)}\right) \to 0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right)}{\left(\frac{-f'(x)}{\cancel{g}f(x)^2}\right)} = ?$$

PITÄISI TOIMIA

MYÖS $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ MUOTOA "$\frac{0}{0}$"

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ PITÄISI TOIMIA