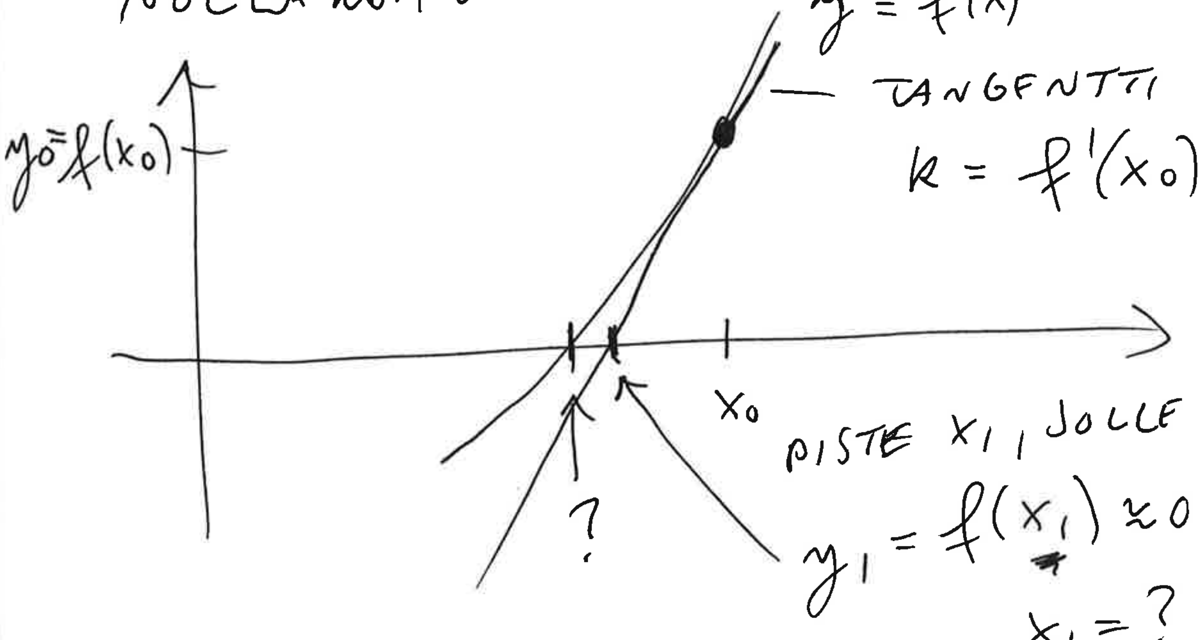
NEWTONIN MENETELMÄ

7-1

SELVITETÄÄN ~~f~~ FUNKTION $f(x)$ NOLLAKOHTA



SUORAN YHTÄLÖ

$$\underbrace{y_1}_{=0} - y_0 = k(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_0 = -\frac{y_0}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = x_0 - \frac{y_0}{k} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

ESIM. $\sqrt{2} = ?$

ETSITÄÄN FUNKTION

$f(x) = x^2 - 2$ NOLLAKOHTA

$f'(x) = 2x$

NYT $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{x_0^2 - 2}{2x_0}$

$$= \frac{2x_0^2 - x_0^2 + 2}{2x_0}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2 + 2}{x_0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + 2 \cdot \frac{1}{x_0}\right)}$$

ARVATAAN $\sqrt{2} \approx 1 = x_0$

$$x_1 = \frac{1}{2}\Big(\underset{\uparrow\, x_0}{1} + 2 \cdot \frac{1}{\underset{\nwarrow\, x_0}{1}}\Big) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\Big(\cancel{}\ \underset{\uparrow\, x_1}{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \underset{\uparrow\, \frac{1}{x_1}}{\frac{2}{3}}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\Big)$$

$$= \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} \approx 1.4166$$

↑ HYVÄ ARVIO LUVULLE

$\sqrt{2} \approx 1.414$

TEHTÄVÄ

$\sqrt{2} = ?$

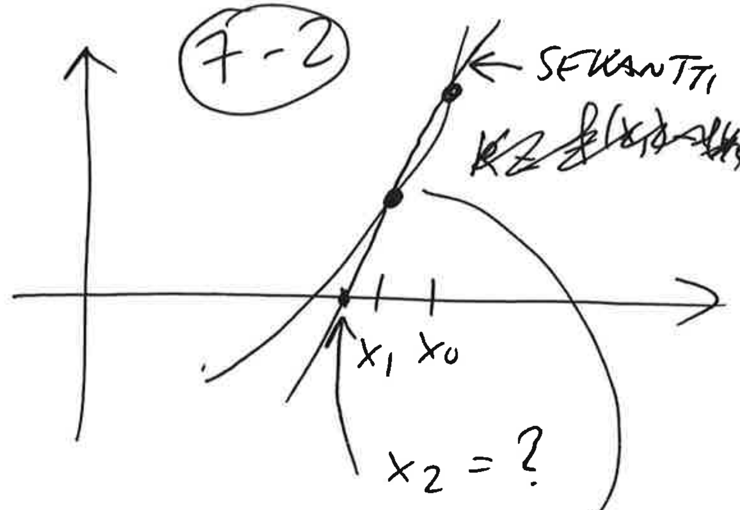
$x_0 = 1$

$x_2 = 2$

+ SEKANTTI - MENETELMÄ

HYVÄ KAAVA, JOS FUNKTION DERIVAATAN LASKEMINEN ON VAIKEAA

SEKANTTIMENETELMÄ



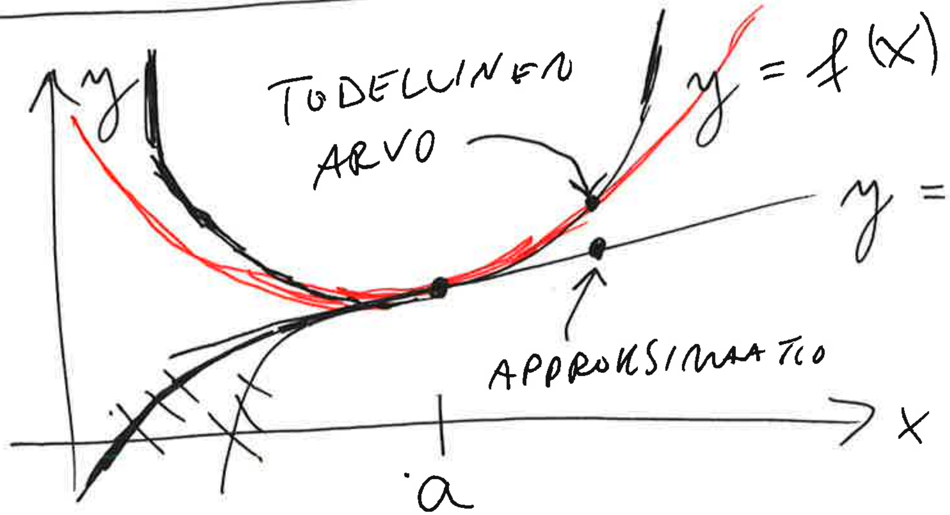
$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

⋮

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)}$$

TAYLORIN POLYNOMI JA SARJA

7-3



$y = f(a) + f'(a)(x-a)$

LINEAARINEN APPROKSIMAATIO TANGENTIN AVULLA:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

VÄLIARVOLAUSEEN MUKAAN JOLLAKIN c PÄTEE

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

(c RIIPPUU LUVUSTA x)

VASTAAVASTI APPROKSIMAATIO TOISEN ASTEEN POLYNOMIN AVULLA:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}$$

VÄLIARVOLAUSEEN MUKAAN (LASKEMISEN JÄLKEEN) JOLLAKIN C PÄTEE (C RIIPPUU X:STÄ)

$$a < c < x$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\frac{f''(c)(x-a)^2}{2}}_{\text{MIKSI?}}$$

7-4

1

YLEINEN TULOS

TAYLORIN POLYNOMI

OLKOON $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ KERTAA DERIVOITUVA FUNKTIO. OLKOON $a \in \mathbb{R}$. JOLLAKIN $a < c < x$ PÄTEE

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{VIRHETERMI}}$$

MIKSI?

KERTOMA

2

HUOM.

$$f = f^{(0)}$$

$$f' = f^{(1)}$$

$$f'' = f^{(2)}$$

7-5

ESIM. $f(x) = \sin(x)$

$a = 0$

$n = 4$

$f^{(0)}(0) = \sin 0 = 0$

$f^{(1)}(x) = \cos x \qquad f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin x \qquad f^{(2)}(0) = -\sin 0 = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$

SIIS $\left(f^{(0)}(0), f^{(1)}(0), f^{(2)}(0), \ldots\right)$

$= (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$

SIIS $\sin x =$

$$\frac{0 \cdot x^0}{0!} + \frac{1 \cdot x^1}{1!} + \frac{0 \cdot x^2}{2!} + \frac{-1 \cdot x^3}{3!} + \frac{0 \cdot x^4}{4!} + \frac{\cos c \; x^5}{5!}$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c \; x^5}{5!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos c \; x^5}{120} \quad \text{JOLLAKIN } 0 < c < x}$$

ESIM. JOS $|x| \le 1$, NIIN

$$\left|\frac{\cos c \; x^5}{120}\right| \le \frac{\overbrace{1}^{|\cos x| \le 1} \cdot 1}{120} \le \frac{1}{100} = 0.01$$

7-6

SIIS ARVIO $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$

PÄTEE NIIN, ETTÄ VIRHE ON

KORKEINTAAN 0.01.

MITEN 2. ASTEEN APPROKSIMAATIO SAADAAN VÄLIARVOLAUSEELLA? ← MIKSI-KYSYMYS (1)

OLETUS: f JATKUVA

f KAKSI KERTAA DERIVOITUVA

VÄLIARVOLAUSE $\Rightarrow$ $f(x) = f(a) + f'(c_1)(x-a)$

JOLLAKIN $a < c_1 < x$

TEHDÄÄN APUFUNKTIO $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

ONKO $f'(x) - f'(a)\Big|_{x=c}$?

SAADAAN (EI IHAN HELPOILLA LASKUILLA) $g(x) = g(a) + g'(c_2)(x-a)$

JOLLAKIN $a < c_2 < x$

$g(x) = f(a) - f(a) - f'(a)(x-a) + \cancel{g'(c_2)}(x-a)$

$f''(c_2)$ DUOLIKAS

$\Rightarrow \ldots$ 2. ASTEEN APPROKSIMAATIO

EI ONNISTUNUT!

MIKSI TAYLORIN KAAVASSA ON KERTOMIA ? ← MIKSI-KYSYMYS 2 (7-8)

OLETETAAN, ETTÄ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

MISSÄ OIKEAN PUOLEN POTENSSISARJA SUPPENEE JOLLAKIN VÄLILLÄ $]a-R, a+R[$.

SIIS

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots c_4(x-a)^4$$

$$f'(x) = 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots$$

$$f'(a) = c_1 + 2c_2 \cdot 0 + 3c_3 \cdot 0 + \dots \Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a)}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2\, c_3(x-a) + 4 \cdot 3\, c_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4\, c_5(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(a) = 2c_2 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{f''(a)}{2}}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot C_3 + 4\cdot 3\cdot 2\, C_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3\, C_5(x-a)^2$$ 7-9

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot C_3 + 0 + 0 + \ldots = 3\cdot 2\cdot C_3 \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{f'''(a)}{3\cdot 2}}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(a) = k!\, C_k + 0 + 0 + \ldots \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

SAATIIN

LAUSE. JOS PÄTEE $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$,

NIIN $C_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$,

SIIS, JOS FUNKTIOLLA f ON JOKIN SARJAESITYS, NIIN SEN TÄYTYY OLLA MUOTOA $\underbrace{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x-a)^n}{n!}}$.

SIIS TAYLORIN SARJA ON YKSIKÄSITTEINEN.

NIMI: f:N TAYLORIN SARJA

TAYLORIN SARJASTA SAADAAN
TAYLORIN POLYNOMI
KATKAISEMALLA SARJA
(JA LISÄÄMÄLLÄ VIRHETERMI

$$\frac{f^{(k)}(c)(x-a)^k}{k!}, \quad a < c < x,$$

JOS VIRHEEN SUURUUS
KIINNOSTAA.)

ESIMERKKEJÄ.

$$f(x)=e^{x} \Rightarrow f^{(k)}(0)=e^{0}=1$$

KAIKILLA $k\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)\,x^{n}}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots$$

$$\sinh x=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

SIJ $x=-x$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots\right)-\left(1-x+\frac{(-1)^{2}x^{2}}{2}+\frac{(-1)^{3}x^{3}}{3!}+\dots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cancel{1}+x+\cancel{\frac{x^{2}}{2}}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots-\cancel{1}+x-\cancel{\frac{x^{2}}{2}}+\frac{x^{3}}{3!}-\dots\right]=\frac{1}{2}\left(2x+2\cdot\frac{x^{3}}{3!}+2\frac{x^{5}}{5!}+\dots\right)=x^{1}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\dots$$

7 - 12

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

n	$2n+1$
0	1
1	3
2	5 ok

$\frac{d}{dx} \Rightarrow$ • $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}$

AIEMMIN

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\frac{d}{dx} \Rightarrow$ • $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}$

PARI SOVELLUSTA

MÄÄRÄÄ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.

RATKAISU. KOSKA TAYLORIN MUKAAN

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, KUN $x \approx 0$, (VIRHE $\left|\frac{\cos c\,(x-0)^5}{120}\right|$, MISSÄ $|c|<|x|$ ON KORKEINTAAN 0.01 KUN $|x| \le 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{x}{3!} = \frac{0}{3!} = 0.$$

[VERTAA $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x - x}{x^2}}_{\uparrow \text{"}\frac{0}{0}\text{"}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{2x}}_{\uparrow \frac{1-1}{2\cdot 0} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2} = \frac{0}{2} = 0.$]

ESIM. $f(x) = \frac{1}{1-x^7}$,

$\boxed{7-14}$

MÄÄRÄÄ $f^{(6)}(0)$ JA $f^{(7)}(0)$.

RATKAISU.

GEOM. SARJA

$$f(x) = \frac{1}{1-x^7} = 1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \dots = \text{TAYLORIN SARJA}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!}$$

TERMI $\frac{0 \cdot x^6}{6!} = \frac{f^{(6)}(0)\,x^6}{6!}$

$$\Rightarrow f^{(6)}(0) = 0$$

TERMI $1 \cdot x^7 = \frac{f^{(7)}(0)\,x^7}{7!} \Rightarrow \frac{f^{(7)}(0)}{7!} = 1$

$$\Rightarrow f^{(7)}(0) = 7! = 5040$$