VIIMEKSI

ANALYYSIN PERUSLAUSE

1. $$\underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{INTEGROINTI}}}_{\text{DERIVOINTI}} = f(x)$$

INTEGROINTI JA DERIVOINTI HÄVISIVÄT

2. JOS $F'(x) = f(x)$, NIIN

$$\underbrace{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{F:n DERIVAATTA}}\,dx}_{\text{INTEGROINTI}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{F} = \Big/_{a}^{b} F(x)$$

HUOM. JOS $G(x) = F(x) + C$, NIIN

MYÖS $G'(x) = F'(x) + 0$

$= f(x)$

$G(b) + C$

$-(G(a) + C)$

$= G(b) - G(a)$

1 & 2 $\Rightarrow$ INTEGROINTI ON DERIVOINNIN KÄÄNTEISOPERAATIO

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIHIN LIITTYVIÄ

KÄSITTEITÄ

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ (LYHYEMMIN DIFYHT TAI DY) ON YHTÄLÖ, JOSSA ON FUNKTION ~~y=f(x)~~ $y=y(x)$ DERIVAATTOJA SEKÄ MUUTTUJAN x FUNKTIOITA.

ESIM. $y'' + e^x y' + \sin(x)\, y = x^2$ (*)

KÄSITTEITÄ

- YHTÄLÖN KERTALUKU: KORKEIMMAN DERIVAATAN ASTE

  YHTÄLÖLLE (*) $\underline{2}$

- y ON RIIPPUVA MUUTTUJA

  x ON RIIPPUMATON MUUTTUJA

- DIF YHT ON <u>LINEAARINEN</u>, JOS FUNKTIOLLA y JA SEN DERIVAATOILLA KAIKKI POTENSSIT OVAT <u>YKKÖSIÄ</u>, EIKÄ OLE MYÖSKÄÄN TERMEJÄ $y^1 (y')^1$ TMS.

9-3

VOISIKO OLLA

$$\sqrt{y}\sqrt{y'} \;?$$

POTENSSI 1

POTENSSIEN SUMMA $= 2 \neq 1$

ESIM (*) ON LINEAARINEN

<u>VASTAUS: EI</u>

PERUSTELLAAN KOHTA LINEAARISUUDEN (SELKEÄMMÄN) MÄÄRITELMÄN AVULLA

- LAUSEKE $L(y)$ ON <u>LINEAARINEN</u> JOS FUNKTIOILLA f JA g ~~...~~ JA VAKIOILLA a ~~...~~ JA b PÄTEE

$$L(af + bg) = aL(f) + \cancel{b(g)}\, bL(g)$$

y^2 EI

$\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}}$, $\dfrac{y^3}{y^2}$ EI

e^y EI

$$L(y) = y'' + e^x y' + \sin(x)\, y$$ (YKKÖNEN 1, DERIVAATTA 1)

$$L(\underbrace{af+bg}_{=y}) = (af+bg)'' + e^x (af+bg)' + \sin(x)(af+bg)$$

$$= af'' + bg'' + e^x(af' + bg') + \sin(x)(af+bg)$$

9-4

$$= a\left(f'' + e^x f' + \sin(x) f\right)$$

$$+\, b\left(g'' + e^x g' + \sin(x) g\right)$$

$$= aL(f) + bL(g)$$ OK ON LINEAARINEN

HUOM. KUN TARKASTELET LINEAARISUUTTA, JÄTÄ POIS TERMIT, JOISSA ON VAIN MUUTTUJAA x ESIM (*):SSÄ x^2.

ESIM. $L(y) = \sqrt{y}\sqrt{y'}$ $\quad \| \; y = af \Rightarrow y' = af'$

$$aL(f)$$
$$\downarrow$$

$$L(af) = \sqrt{af}\sqrt{af'} = \sqrt{a}\sqrt{f}\sqrt{a}\sqrt{f'} = a\sqrt{f}\sqrt{f'} = a\sqrt{f}\sqrt{f'}$$

OK

$$L(y) = \sqrt{y}\sqrt{y'} \quad \Big\| \quad y = f + g$$

$$L(f+g) = \sqrt{f+g}\sqrt{f'+g'} \overset{?}{=} \sqrt{f}\sqrt{f'} + \sqrt{g}\sqrt{g'} \quad \Big\| \quad f(x) = 1, \quad g(x) = x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^3}\sqrt{3x^2} = \sqrt{x^3}\sqrt{3x^2}$$

$$f'(x) = 0$$
$$g'(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^3} = \sqrt{x^3}$$

EPÄTOSI

- TARKASTELLAAN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖÄ $L(y) = f(x)$, MISSÄ L ON LINEAARINEN.

JOS $f(x) \equiv 0$, NIIN YHTÄLÖ ON <u>HOMOGEENINEN</u>

JOS $f(x) \not\equiv 0$, NIIN YHTÄLÖ ON <u>EPÄHOMOGEENINEN</u>

<u>ESIM.</u> $y'' + xy = 0$ ON HOMOGEENINEN

$y'' + xy = \sin(x)$ ON EPÄHOMOGEENINEN

9 – 6

- $f(x) \equiv 0 \iff f(x) = 0$ KAIKILLA x

  "f IDENTTISESTI NOLLA"

- $f(x) \not\equiv 0 \iff f(x) \neq 0$ JOILLAKIN x

- JOS DIFYHT VOIDAAN ~~SAA~~ MUOKATA MUOTOON

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

NIIN SE ON <u>SEPAROITUVA</u>. SEPAROITUVA DIFYHT ON HELPPO RATKAISTA

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \ldots}} \quad \text{RATKAISU}$$

<u>ESIM.</u> $y' = xy \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \overbrace{\dfrac{1}{y}\,dy = x\,dx}^{\text{SEPAROINTI ONNISTUI!}}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \text{ VAKIO} \quad \| e^{(\,)}$$

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}} e^{C}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = A e^{\frac{x^2}{2}}}}$$

e^x JA $\ln(x)$ KÄÄNTEISFUNKTIOITA

$$\boxed{e^{a+b} = e^a e^b}$$

MERK. $e^C = A$ VAKIO

SAATIIN DIFYHT:N RATKAISU

<u>TARKISTUS</u> $y' = xy$

$$y = A e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{A e^{\frac{x^2}{2}}} \cdot x = xy$$

ok

PERUS INTEGROINTEJA

INTEGROINTI ON DERIVOINNILLE KÄÄNTEINEN OPERAATIO.
(JOSKUS INTEGROINTI ON VÄHÄN VAIKEAMPAA KUIN DERIVOINTI.)

ESIM.

$$\int_a^b x^n \, dx = ?$$

↑ MINKÄ FUNKTION DERIVAATTA?

$$D\, x^{n+1} = (n+1)\, x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{D\, \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n}$$

$$\Rightarrow \int_a^b x^n \, dx = \Big/_{a}^{b} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

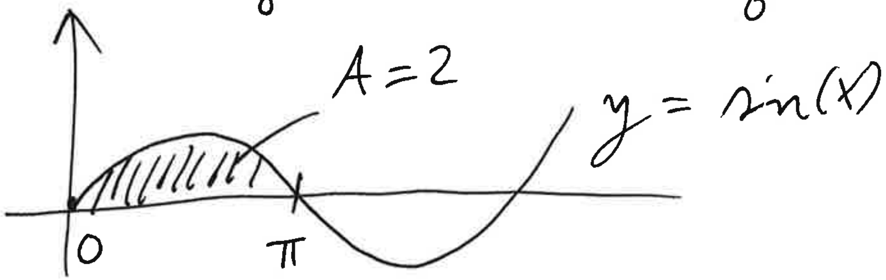
ESIM.

$$\int_0^1 (x^2+2x+1)\, dx = \Big/_{0}^{1} \frac{x^3}{3} + x^2 + x = \left(\frac{1}{3}+1+1\right) - 0 = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

ESIM.

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx = \Big/_{0}^{\pi} -\cos(x) = -\cos(\pi) - (-\cos 0)$$

$$= 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$



9 - 9

ESIM. $$\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}\left(e^{2}-e^{-2}\right) = \underline{\underline{\sinh(2)}}$$

ESIM. $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \int_{0}^{1} (2-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \Big/_{0}^{1} -2(2-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big/_{0}^{1} -2\sqrt{2-x} = -2 \Big/_{0}^{1} \sqrt{2-x} = -2\left(\sqrt{2-1}-\sqrt{2-0}\right)$$

$$= -2\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{2\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

TAULUKKOKIRJA

KAAVA ANNETAAN KOKEESSA, JOS TARPEEN

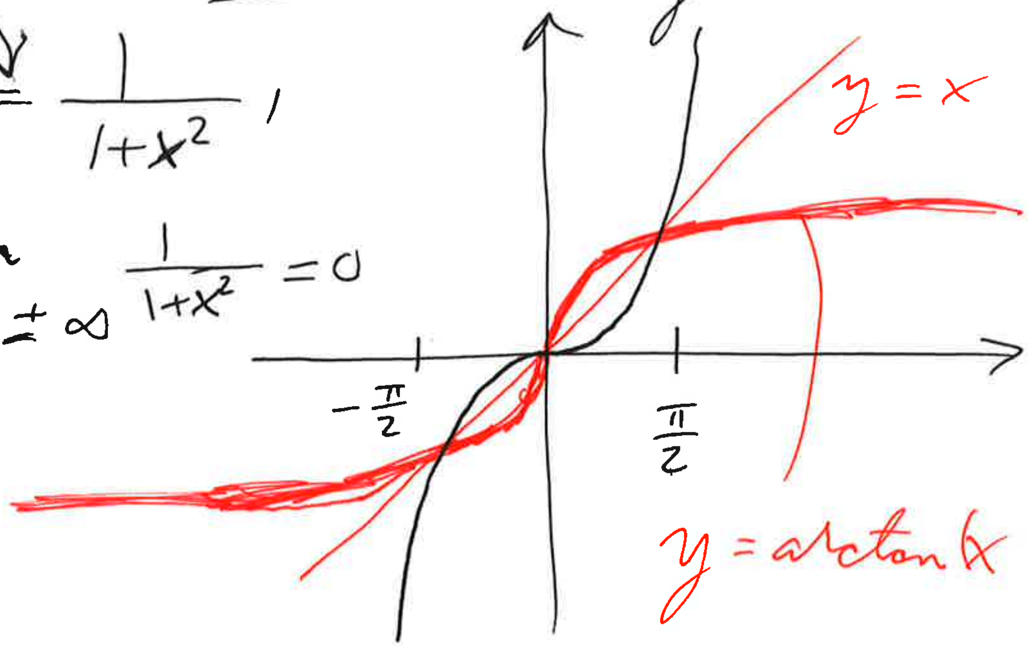
ESIM. KOSKA $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

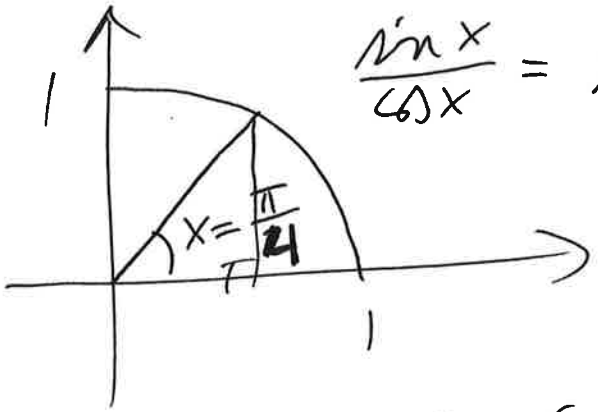
NIIN

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \Big/_{-1}^{1} \arctan(x)$$

$$= \arctan(1) - \arctan(-1)$$



9-10



$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1 \iff \arctan(1) = x$$

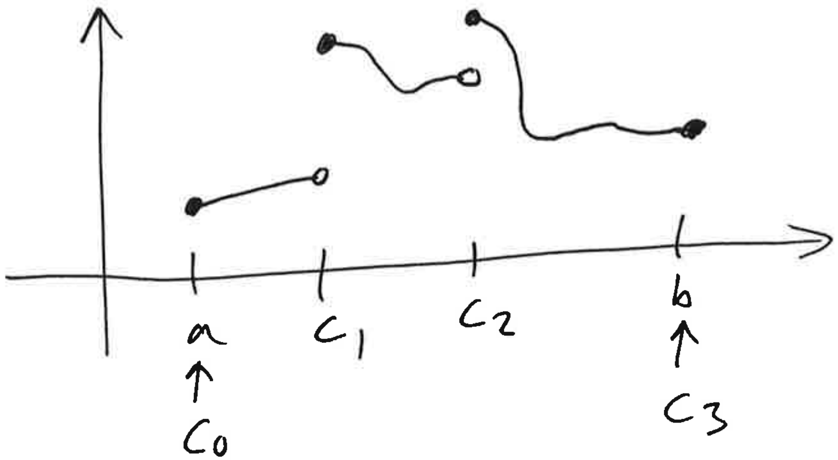
TOTEUTUU, KUN $x = \frac{\pi}{4}$

SIIS $\arctan(1) - \arctan(-1)$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\begin{cases} a = c_0 \\ b = c_3 \end{cases}$$

JOS $f : [a, b]$ ON <u>PALOITTAIN JATKUVA</u>



MÄÄRITELLÄÄN

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c_0}^{c_3} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)\,dx$$

EPÄOLEELLINEN INTEGRAALI

KAKSI PERUSTYYPPIÄ:

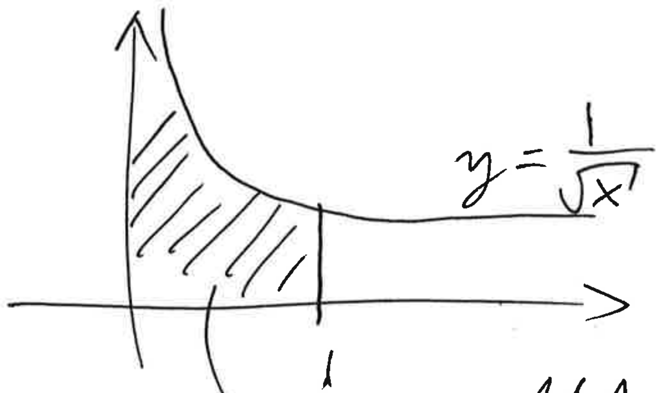
(1) INTEGROIMISVÄLI ULOTTUU $+\infty$ TAI $-\infty$, ESIM.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{TAI} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(2) FUNKTIO EI OLE RAJOITETTU INTEGROIMISVÄLILLÄ ESIM.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

MENEE ∞:ÄÄN, INTEGROIMISVÄLIN ALKUPISTEESSÄ 0



ALA $\in \mathbb{R}$

VAI ALA $= \infty$?

TYYPPI 1 OLKOON f JATKUVA,

JOS ON ÄÄRELLINEN RAJA-ARVO

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx \qquad (\text{EI } \pm\infty),$$

NIIN $\int_a^\infty f(x)\,dx$ SUPPENEE JA MERKITÄÄN

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

JOS RAJA-ARVOA EI OLE, NIIN INTEGRAALI HAJAANTUU.

[VERTAA $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}}$ $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \quad \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$?]

ESIM. $f(x) = x^{-p}, \; p > 0$ $\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = ?$

$p \neq 1$ $\quad \int_1^R x^{-p}\,dx = \Big/_1^R \frac{1}{1-p} x^{1-p} = \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - 1\right)$

$\to \infty$ JOS $1-p > 0$ ELI $0 < p < 1$

$\to \frac{1}{p-1}, \; p > 1$

KUN $R \to \infty$

$p = 1$ $\quad \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \Big/_1^R \ln(x) = \ln R \to \infty$, KUN $R \to \infty$

TULOS: $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ SUPPENEE $\Leftrightarrow p > 1$

VERTAA $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ SUPPENEE $\Leftrightarrow p > 1$