8.2 Integraalifunktio I

Määritelmä 8.7

Jos $F'(x) = f(x)$ jollakin avoimella välillä, niin F on funktion f **integraalifunktio**.

- Peruslauseen mukaan kaikilla jatkuvilla funktioilla f on integraalifunktio

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Sitä ei aina voida esittää alkeisfunktioiden avulla, vaikka f olisi alkeisfunktio; esim. $f(x) = e^{-x^2}$. Tällaisia integraalifunktioita (ja muita vastaavia) kutsutaan **erikoisfunktioiksi**.

8.2 Integraalifunktio II

- Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen, mutta eri integraalifunktiot poikkeavat toisistaan vain vakiolla; merkitään

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ \ C \in \mathbf{R}\ \ \text{vakio},$$

  jos $F'(x) = f(x)$.
  Perustelu: Jos $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ kaikilla x, niin funktion $F_1(x) - F_2(x)$ derivaatta on identtisesti nolla, joten se on vakio.

- Joidenkin määrättyjen integraalien arvot voidaan laskea ilman integraalifunktiota. Tällaisia esimerkkejä ovat mm.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{ja} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

  (Nämä ovat myöhemmin käsiteltäviä ns. epäoleellisia integraaleja, koska integroimisrajana on ∞.)

8.2 Integraalifunktio III

Käytännössä integraalit pyritään kuitenkin laskemaan integraalifunktion avulla käyttämällä seuraavaa lausetta.

Lause 8.8

Jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin sen määrätty integraali voidaan laskea (päätepisteissäkin jatkuvan) integraalifunktion G avulla:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} G(x) = G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Perustelu: Koska myös $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on funktion f integraalifunktio, niin jatkuvuuden nojalla $F(x) - G(x) = C =$ vakio välillä $x \in [a, b]$. Sijoittamalla $x = a$ saadaan $C = -G(a)$. Näin ollen

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) = G(x) - G(a),$$

josta väite seuraa sijoittamalla $x = b$.

8.2 Integraalifunktio IV

Tärkeimmät integraalifunktiot saadaan suoraan derivoimissäännöistä:

$$\begin{aligned}
\int x^r\,dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ \ r \neq -1 \\
\int x^{-1}\,dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x\,dx &= e^x + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C
\end{aligned}$$

Esimerkki 8.9

Laske integraalit $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$ ja $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$.

Ratkaisu: Ensimmäinen integraalifunktio on $-e^{-x}$, joten integraalin arvo on

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = -e^{-1} + e^{1} = 2\sinh 1.$$

Toinen integraalifunktio on $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$, joten integraalin arvo on

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Esimerkki 8.10

Laske integraali $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$.

Ratkaisu: Integraalifunktion oikea muoto voisi olla $F(x) = a(25-9x^2)^{1/2}$; tarkistetaan kerroin a derivoimalla:

$$D\big(a(25-9x^2)^{1/2}\big) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (-18x)(25-9x^2)^{-1/2} = \frac{-9ax}{\sqrt{25-9x^2}},$$

joten valinnalla $a = -1/9$ saadaan oikea integraalifunktio. Näin ollen

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx = -\frac{1}{9}\Big/_0^1 (25-9x^2)^{1/2} = -\frac{1}{9}\big(\sqrt{16}-\sqrt{25}\,\big) = \frac{1}{9}.$$

Toinen tapa: Käytetään myöhemmin käsiteltävää *sijoitusmenetelmää*.

Peruslauseen avulla saadaan seuraava yleisempi derivoimiskaava:

Lause 8.11

Jos f on jatkuva ja funktiot a ja b ovat derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)\,b'(x) - f\big(a(x)\big)\,a'(x).$$

Perustelu: Olkoon F funktion f integraalifunktio. Tällöin

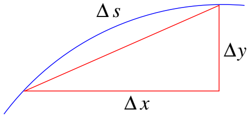
$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big).$$

Väite seuraa tästä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä, koska $F' = f$.

8.3 Geometrisia sovelluksia I

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\,dx$ on funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: $\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$



Idea: Lyhyellä välillä $[x, x + \Delta x]$ kaarenpituusalkio on muotoa $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2}\,\Delta x \approx \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\Delta x$.

8.3 Geometrisia sovelluksia II

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Idea: Kun pieni pala kuvaajaa (kaarenpituus Δs) pyörähtää, niin vastaava pinta-alkio pyörähdyspinnalla on

$$\Delta A \approx \text{piiri} \cdot \text{leveys} = 2\pi|f(x)| \cdot \Delta s.$$

Tarkempi arvio saadaan approksimoimalla pinta-alkiota katkaistulla kartiolla, mutta se johtaa samaan lopputulokseen.

8.3 Geometrisia sovelluksia III

- Jos kappaletta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on
$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$
- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

  Syy: Poikkileikkaus kohdassa x on $f(x)$-säteinen ympyrä, joten $A(x) = \pi f(x)^2$.

- Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx.$$

Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$.

8.4 Epäoleellinen integraali

Kaksi eri perustyyppiä:

- Tyyppi I: Integroimisvälinä $[a, \infty[$ tai $]-\infty, b]$ tai koko $\mathbf{R}$.
- Tyyppi II: Funktio $f\colon\ ]a, b[\to \mathbf{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä.
- Jos ongelmia on molemmissa päätepisteissä tai integroimisvälin sisällä, niin integroimisväli jaetaan niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta: vaaditaan, että jokainen erikseen antaa äärellisen tuloksen, jolloin koko integraali = osien summa.

Esimerkki 8.12

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

jos molemmat oikean puolen integraalit suppenevat (kuten myöhemmissä esimerkeissä osoitetaan).

8.4 Tyyppi I I

Määritelmä 8.13

Olkoon $f\colon [a,\infty[\to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva. Tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion f **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $[a,\infty[$.

Vastaavasti funktiolle $f\colon]-\infty, b] \to \mathbf{R}$ määritellään

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen.

Esimerkki 8.14

Laske epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

Ratkaisu: Koska

$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -\Big/_0^R e^{-x} = 1 - e^{-R} \to 1,$$

kun $R \to \infty$, niin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Esimerkki 8.15

Funktiolle $f(x) = x$ pätee

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0,$$

koska kaikki integraalit ovat nollia. Yleisemmin sama pätee kaikille parittomille funktioille $f(x)$.

Integraalin määritelmä koko reaaliakselin yli yllä olevaa raja-arvoa käyttämällä on periaatteessa mahdollinen, mutta johtaa hieman kummallisiin tuloksiin. Sille (ja muille samantapaisille variaatioille) käytetään nimitystä Cauchyn pääarvointegraali, mutta se ei ole integraalin "virallinen" määritelmä.

8.4 Integraali koko reaaliakselin yli II

Määritelmä 8.16

Jos $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on paloittain jatkuva, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,$$

jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat.

Kuitenkin pätee: Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Syy: Positiivisen funktion tapauksessa ei voi tapahtua esimerkin 8.15 tapaista $\pm\infty$ kumoutumista, joka voi muuten sekoittaa asiaa. Tämä kaava **ei siis päde** yleisesti, vrt. tapaus $f(x) = x$.

8.4 Tyyppi II

Perustapaus $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva, mutta sillä ei äärellistä raja-arvoa, kun $x \to a+$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen.

Esimerkki 8.17

Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Ratkaisu: Koska

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Big/_{\varepsilon}^{1} \sqrt{x} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2,$$

kun $\varepsilon \to 0+$, niin integraali suppenee ja sen arvo on 2.

8.4 Majoranttiperiaate I

Epäoleellisen integraalin suppenemista voidaan tutkia majoranttiperiaatteen avulla, josta seuraavassa eräs versio.

Lause 8.18

Olkoon $|f(x)| \leq g(x)$ *välillä* $a < x \leq b$. *Jos epäoleellinen integraali*

$$I = \int_a^b g(x)\,dx$$

suppenee, niin myös

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee ja sen itseisarvo on korkeintaan I.

8.4 Majoranttiperiaate II

Esimerkki 8.19

Koska

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ välillä } 0 < x \leq 1$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2.

Esimerkki 8.20

Vastaavasti

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \frac{1}{\sqrt{x}(0+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ kun } x \geq 1.$$

Koska $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = 2$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2.

Huomataan: Sopivan majorantin valinta riippuu sekä funktiosta että integroimisvälistä!

8.5 Integroimismenetelmiä

Helpoimmat integraalit voi laskea suoraan peruskaavoja käyttämällä. Osa hankalammista tapauksista palautuu näihin, jos integraalista onnistuu tunnistamaan "sisäfunktion derivaatan".
Systemaattisempia menetelmiä ovat

- Osittaisintegointi
- Sijoitusmenetelmä
- Osamurtohajotelmat
- Numeerinen integrointi[2]

Näitä käsitellään seuraavilla sivuilla.

[2] Oheislukemista tällä kurssilla.

8.5 Osittaisintegrointi I

Lause 8.21

Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia funktioita välillä $[a, b]$ (eli käytännössä hieman suuremmalla avoimella välillä). Tällöin

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Vastaavasti integraalifunktioille pätee

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Perustelu: Tulon derivoimissääntö, integrointi ja termien ryhmittely.
Idea: Toimii silloin, kun funktion $f(x)g'(x)$ integrointi on helpompaa kuin alkuperäisen funktion $f'(x)g(x)$.

Esimerkki 8.22

Laske integraali

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx.$$

Ratkaisu: Kokeillaan osittaisintegrointia ja valitaan $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = -\cos x$ (vakiota ei tässä tarvita, mutta ei se väärinkään ole) ja $g'(x) = 1$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x \, dx &= \mathop{/}_{0}^{\pi} (-\cos x) \cdot x - \int_0^\pi (-\cos x) \cdot 1 \, dx \\ &= -\pi \cos \pi + 0 + \mathop{/}_{0}^{\pi} \sin x = \pi. \end{aligned}$$

Huom: Jos f ja g valitaan esimerkissä toisin päin, niin osittaisintegrointi johtaa entistä hankalampaan integraaliin.

8.5 Sijoitusmenetelmä I

Lause 8.23

Jos f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du,$$

kun $A = g(a)$, $B = g(b)$.

Käytännössä: Sijoitus $u = g(x)$, jolloin

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

Rajojen muutos: $x = a \Rightarrow u = g(a) = A$, $x = b \Rightarrow u = g(b) = B$.
Perustelu: Seuraa yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä integroimalla.
Huomaa, että sijoituksen jälkeen **ei tarvitse** enää palata alkuperäiseen muuttujaan x (paitsi integraalifunktiota laskettaessa; kts. alla).

8.5 Sijoitusmenetelmä II

Muunnos $u = g(x)$ voidaan (usein) kirjoittaa myös käänteisfunktion avulla:

$$\begin{aligned} x &= g^{-1}(u) \Rightarrow \\ dx &= (g^{-1})'(u)\,du = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(u)\big)}\,du = \frac{1}{g'(x)}\,du, \end{aligned}$$

joten tulos $du = g'(x)\,dx$ on sama kuin aikaisemmin. On suositeltavaa kirjoittaa muunnos aina molempiin suuntiin, koska rajojen laskeminen on helpompaa alkuperäistä muotoa käyttämällä, mutta differentiaalin muuttuminen on (yleensä) helpompi laskea käänteisen muodon avulla. (Adams & Essex -kirjassa nämä käsitellään erikseen kohdissa 5.6 ja 6.3, mikä on tavallaan turhaa.)

8.5 Sijoitusmenetelmä III

Esimerkki 8.24

Laske integraali $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$.

Ratkaisu: Neliöjuuri hankaloittaa integroimista, joten sijoitetaan $x = t^2$, kun $t \geq 0$. Tällöin $dx = 2t\,dt$ ja käänteisestä muodosta $t = \sqrt{x}$ saadaan (hieman helpommin): kun $x = 0$, niin $t = \sqrt{0} = 0$; kun $x = \pi^2$, niin $t = \sqrt{\pi^2} = \pi$. Näin ollen

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\pi} 2t\sin t\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = 2\pi.$$

(Viimeinen integraali laskettiin aikaisemmin osittaisintegroimalla esimerkissä 8.22)

8.5 Sijoitusmenetelmä IV

Myös integraalifunktio voidaan usein laskea sijoitusmenetelmän avulla, jolloin sijoituksen ja integroinnin jälkeen palataan takaisin alkuperäiseen muuttujaan x, toisin kuin määrätyn integraalin kohdalla.
Menetelmän idea tulee parhaiten esille konkreettisessa esimerkissä.

Esimerkki 8.25

Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Ratkaisu: Sijoitetaan $x = t^2$, $t > 0$, eli $t = \sqrt{x}$, jolloin saadaan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

8.5 Osamurtohajotelma I

Kaikki rationaalifunktiot $R(x) = P(x)/Q(x)$ voidaan integroida osamurtohajotelmien avulla.

Ensimmäinen vaihe: Jakokulmassa jakamalla (tai muuten) palautetaan tilanne siihen, että $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Esimerkki 8.26

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} &= \frac{(x+1)-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \\
\frac{x^2}{x^2-1} &= \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

8.5 Osamurtohajotelma II

Osamurtohajotelmaa voidaan käyttää integroinnissa seuraavalla tavalla.

Esimerkki 8.27

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Toinen vaihe: Jaetaan nimittäjässä oleva polynomi $Q(x)$ joko 1. tai 2. asteen reaalisiin tekijöihin. Näin voidaan aina tehdä (ainakin periaatteessa); kts. Kompleksiluvut-moniste.

Suurimmassa osassa käytännön sovelluksia tarvitaan vain helpointa tulosta

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kun kertoimet A, B valitaan sopivalla tavalla.

8.5 Osamurtohajotelma III

Esimerkki 8.28

Muodosta lausekkeen $\dfrac{2x+3}{(x-4)(x+5)}$ osamurtohajotelma.

Ratkaisu: Hajotelma on muotoa

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $(x-4)(x+5)$, jolloin saadaan

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-4).$$

Kertoimet A ja B saadaan tästä kahdella eri tavalla (seuraava kalvo):
1. tapa on usein nopeampi, mutta 2. tapa myös todistaa, että hajotelma on oikein. Jos hajotelman lähtökohta on puutteellinen, niin 1. tapa tuottaa väärän vastauksen, joka paljastuu 2. tavalla laskettaessa.

8.5 Osamurtohajotelma IV

$$\text{Yhtälö:} \quad 2x + 3 = A(x + 5) + B(x - 4).$$

Tapa 1: Sijoittamalla $x = 4$ saadaan $8 + 3 = A \cdot 9 + B \cdot 0$, joten $A = 11/9$. Sijoittamalla $x = -5$ saadaan $-10 + 3 = A \cdot 0 + B \cdot (-9)$, joten $B = 7/9$.

Tapa 2: Kirjoitetaan yhtälö muodossa $2x + 3 = (A + B)x + (5A - 4B)$ ja verrataan x:n kertoimia ja vakioita yhtälön eri puolilla. Näin saadaan yhtälöpari $A + B = 2$ ja $5A - 4B = 3$, josta saadaan $A = 11/9$ ja $B = 7/9$.

Huom: Polynomit ovat samat vain silloin, kun niillä on samat kertoimet. Huomaa, että tarkoituksena on valita kertoimet A, B niin, että yhtälö toteutuu kaikilla x.

Esimerkki 8.29

Muodosta lausekkeen $\dfrac{1}{x^2(x+3)}$ osamurtohajotelma.

Ratkaisu: Laskemalla (luotettavalla) tavalla 2 huomataan, että muotoa

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x^2}$$

oleva hajotelma ei toimi. Oikea hajotelma onkin muotoa

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}.$$

Kertomalla lausekkeella $x^2(x+3)$ saadaan yhtälö

$$1 = Ax^2 + B(x+3) + Cx(x+3) = (A+C)x^2 + (B+3C)x + 3B.$$

Kertoimia vertaamalla saadaan yhtälöt $A+C=0$, $B+3C=0$ ja $3B=1$, joista ratkeaa helposti $B=1/3$, $C=-1/9$ ja $A=1/9$.

Tämä kappale on kokonaan oheislukemista.

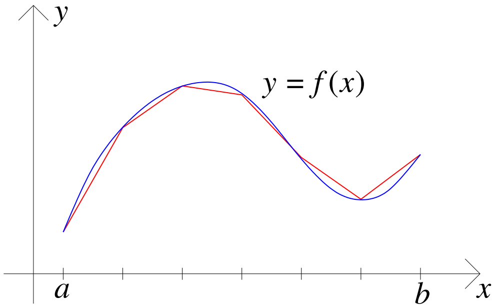
Hankalien integraalien likiarvoja voidaan joskus laskea Taylor-polynomien avulla. Tämä edellyttää kuitenkin sitä, että integroitava funktio on annettu jonkin lausekkeen avulla. Joissakin sovelluksissa funktiosta tunnetaan vain sen arvot tietyissä pisteissä: $y_k = f(k\Delta x)$ (esim. mittausdata). Tällöin integraalilla ei ole mitään yksiselitteistä oikeaa arvoa, mutta sitä voidaan approksimoida seuraavilla menetelmillä. Niitä voidaan tietysti käyttää myös hankalien integraalien likiarvon laskemisessa.

8.5 Numeerinen integrointi* II

- Yksinkertaisin tapa on puolisuunnikas- eli trapetsisääntö, jossa funktion kuvaajaa approksimoidaan murtoviivalla:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

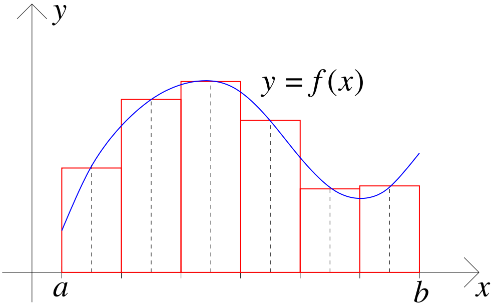
jossa $h = (b-a)/n$ on askelpituus, $n \in \mathbf{N}$ jakovälien lukumäärä, $x_k = a + kh$, $0 \le k \le n$, ovat jakopisteet ja $y_k = f(x_k)$.



Muita approksimaatioita ovat mm.

- Keskipistesääntö ("pylväsdiagrammi-approksimaatio")

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)),\\ m_k &= (x_{k-1} + x_k)/2,\end{aligned}$$



- Simpsonin sääntö

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n),$$

jossa funktiota interpoloidaan 2. asteen polynomilla kahdella peräkkäisellä jakovälillä; jakovälien lukumäärän n täytyy olla parillinen.