Ominaisuuksia

(i) Lineaarisuus:

$$\int_a^b \left(c_1 f(x) + c_2 g(x) \right) dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx ,$$

kun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ vakioita

(ii) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)$$

riippumatta pisteiden a, b, c järjestyksestä

(iii) $f(x) \leq g(x)$ välillä $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Erityisesti: $f(x) \leq |f(x)|$, $-f(x) \leq |f(x)|$ kaikilla x

$$\Rightarrow \pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

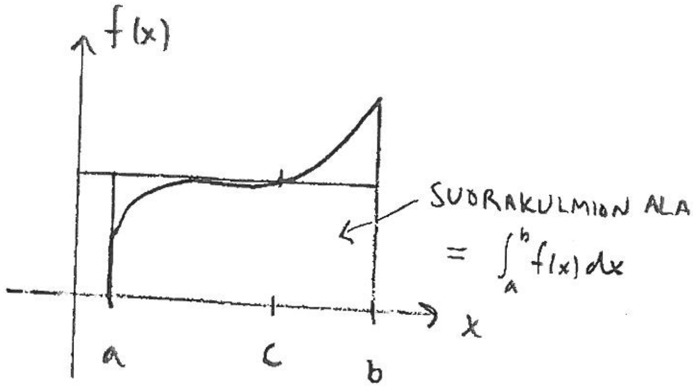
$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{aina}$$

Keskiarvo-ominaisuus

Olkoon $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Silloin on olemassa $c \in [a,b]$, jolle

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f\text{:n keskiarvo välillä } [a,b]$$

$$= \bar{f}$$



Syy: Merkitään

$$m = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

$$M = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

f jatkuva $\Rightarrow$ f saa kaikki arvot minimin m ja maksimin M välillä

$\Rightarrow$ on olemassa c, jolle $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Analyysin peruslause

- Vastaa kysymykseen, miten integraaleja käytännössä lasketaan
- Osoitetaan, että kaikilla jatkuvilla f on integraalifunktio F (= primitiivi), jolle $F'(x) = f(x)$ kaikilla x. Tällöin merkitään $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Lause Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin kaavalla

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

määritelty funktio $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]a,b[$.

Lisäksi: Jos $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jokin f:n integraalifunktio, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\Big/_{a}^{b} G(x)}_{\text{"SUOMALAINEN" MERKINTÄ}} = G(b) - G(b) = \underbrace{G(x)\Big|_a^b}_{\text{ADAMS \& ESSEX}}$$

$\Big/_{a}^{b}$ = "SIJOITUS a:STA b:HEN"

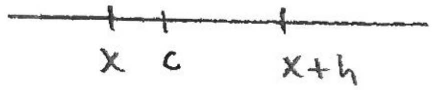
Perustelu: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right)$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot (x+h-x)$$

JOLLAKIN C

KESKIARVO-OMINAISUUS

RIIPPUU X:STÄ JA h:STA



$= f(c) \rightarrow f(x)$, kun $h \rightarrow 0$. Siis $F'(x) = f(x)$.

Lisäksi: $\dfrac{d}{dx}\left(G(x) - F(x)\right) = 0 \Rightarrow G(x) - F(x) = \text{VAKIO} = C$

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow G(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C \Leftrightarrow C = G(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - C = G(x) - G(a)$$

$$x \rightarrow b \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a). \quad \square$$

Esim. $D x^{m+1} = (m+1) x^m \Rightarrow \int_a^b x^m \, dx = \Big/_a^b \frac{1}{m+1} x^{m+1}$, $m \neq -1$

$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) \, dx = \Big/_0^1 \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right) = \frac{1}{3} + 1 + 1 - 0 = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

Esim. $\int_0^\pi \sin x \, dx = \Big/_0^\pi - \cos x = -\cos \pi - (-\cos 0) = \underline{\underline{2}}$

Esim. $\int_{-1}^1 e^{2x} \, dx = \Big/_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2}) = \underline{\underline{\sinh 2}}$

Esim. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = ?$

$$D \sqrt{x} = D x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Kokeilu: $D \sqrt{2-x} = \frac{1}{2} (2-x)^{-1/2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$\Rightarrow D \left(-2 \sqrt{2-x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

SIIS: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -2 \Big/_0^1 \sqrt{2-x} = -2 (1 - \sqrt{2}) = \underline{2(\sqrt{2} - 1)}$

Esim. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big/_{-1}^1 \arctan x = \arctan 1 - \arctan(-1)$

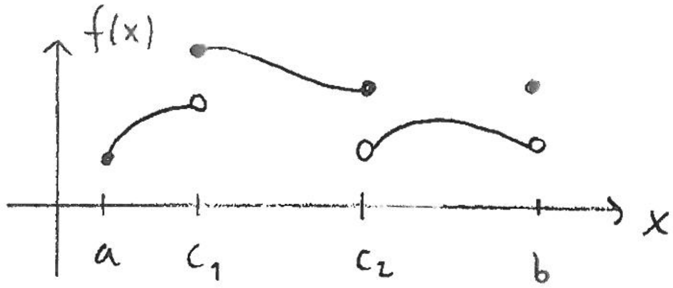
$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Integraalin yleistys paloittain jatkuville funktioille:

Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on <u>paloittain jatkuva</u>, jos on olemassa pisteet

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b, \text{ joille}$$

- f on jatkuva väleillä $]c_{i-1}, c_i[$, $i = 1, 2, \ldots, k$
- f:llä on toispuoleiset raja-arvot pisteissä c_i, $i = 0, 1, \ldots, k$



Tällöin f voidaan "tulkita" jatkuvaksi jokaisella välillä $[c_{i-1}, c_i]$ ja $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$ on määritelty.

Asetetaan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx.$$

2. Epäoleellinen integraali

Kaksi eri perustyyppiä:

I Integroimisväli ulottuu $+\infty$ tai $-\infty$ tai on koko $\mathbb{R}$:

esim. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

II Funktio ei ole rajoitettu integroimisvälillä,

esim. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Tyyppi I

Olkoon $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx, \qquad (\text{ei } \pm\infty)$$

niin f:n epäoleellinen integraali suppenee ja merkitään

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Jos raja-arvoa ei ole, niin integraali hajaantuu.

↑ TAI $\pm\infty$

Vastaavasti: $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{b} f(x)\,dx,$$

jos lim on olemassa.

Esim. $f(x) = x^{-p}$, $p > 0$

$$p \neq 1: \int_1^R x^{-p}\,dx = \Big/_{\!1}^{R} \frac{1}{1-p} x^{1-p} = \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - 1\right) \xrightarrow{R\to\infty} \begin{cases} \infty, & 0<p<1 \\ \frac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

$$p = 1: \int_1^R \frac{dx}{x} = \Big/_{\!1}^{R} \ln x = \ln R \to \infty, \text{ kun } R \to \infty.$$

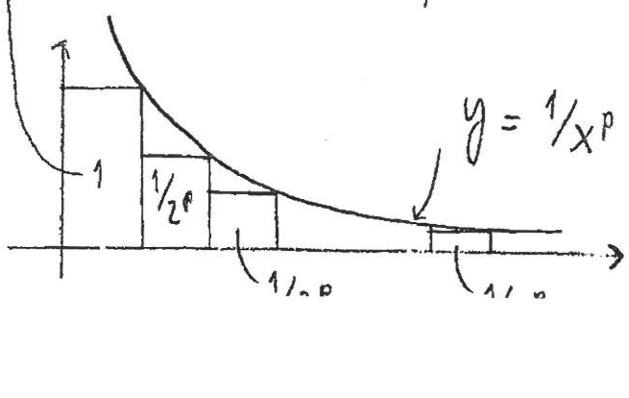
Tulos: $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ suppenee $\Leftrightarrow p > 1$.

Seuraus Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ suppenee $\Leftrightarrow p > 1$

Syy (VRT. AIKAISEMMIN TAPAUS $p=1$)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^p} < 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1} < \infty$$

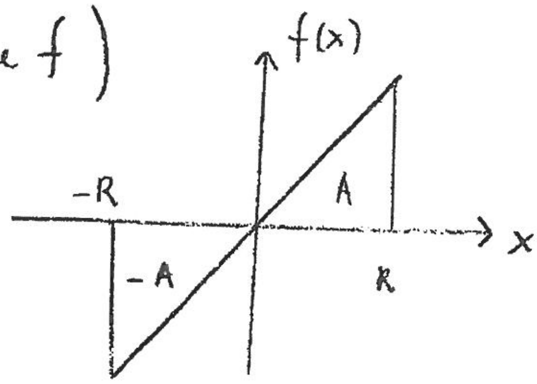
KAIKILLA $N \in \mathbb{N}$.



Tapaus $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

<u>Esim.</u> $\displaystyle\int_{-R}^{R} x\,dx = \Big/_{-R}^{R} \tfrac{1}{2}x^2 = 0$ kaikilla $R>0$

(samoin kaikille parittomille f)



Kuitenkin: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\,dx$ ei suppene!

<u>Määritelmä</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,$$

jos molemmat oikean puolen integraalit suppenevat.

<u>Esim.</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$

$$= \Big/_{-\infty}^{0} e^{x} - \Big/_{0}^{\infty} e^{-x} = 1-(-1) = \underline{\underline{2}}$$

TARKOITTAA RAJA-ARVOA $R \to \infty$

<u>Huom:</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$, jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

<u>Tyyppi II</u> $f(x)$ ei rajoitettu integroimisvälillä;

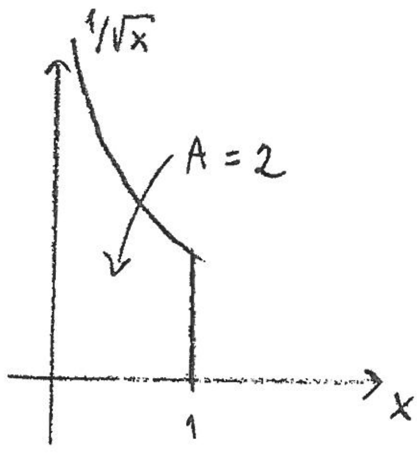
yleensä $\int_a^b f(x)\,dx$ ja $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ TMS.

Idea: Poistetaan ongelmakohdan ympäristö ja tutkitaan.

<u>Esim.</u> $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_\varepsilon^1 x^{-1/2} = 2 \Big/_{\varepsilon}^{1} x^{1/2} = 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) \to 2,$$

kun $\varepsilon \to 0+$. Siispä $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{2}}$



Jos samassa integraalissa on useita ongelmakohtia, niin se jaetaan niin moneen osaan, että jokaiseen jää vain yksi ongelma.

<u>Esim.</u> $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi$$

MAPLE!

5. Laskumenetelmiä (SEURAA TIIVISTELMÄN NUMEROINTIA)

- osittaisintegrointi
- sijoitusmenetelmä
- (osamurtohajotelma)
- numeerinen integrointi

Osittaisintegrointi

Perustuu tulon derivoimiskaavaan:

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)g(x)\Big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b \frac{d}{dx}\Big(f(x)g(x)\Big)\,dx}_{=\Big/_a^b f(x)g(x)} = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

IDEA: Toimii silloin, kun $f(x)g'(x)$ on helpompi integroida kuin $f'(x)g(x)$.

Integraalifunktioille:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Esim. $\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = ?$

$$\int_0^R x e^{-x}\,dx = \Big/_0^R x\cdot(-e^{-x}) - \int_0^R 1\cdot(-e^{-x})\,dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{VALITAAN } f'(x) = e^{-x} \\ \Rightarrow f(x) = -e^{-x} \\ g(x) = x \\ \Rightarrow g'(x) = 1 \end{array}\right.$$

$$= -Re^{-R} + 0 + \int_0^R e^{-x}\,dx$$

$$= -Re^{-R} - \Big/_0^R e^{-x} = -Re^{-R} - e^{-R} + e^0$$

$$= 1 - Re^{-R} - e^{-R} \to 1, \text{ kun } R \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \underline{\underline{1}}$$

[Valinta $f'(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$ johtaa hankalampaan integraaliin $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$]

Esim. $\underline{\int e^x \sin x\,dx}$ $\qquad f'(x) = e^x,\ g(x) = \sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \qquad f'(x) = e^x,\ g(x) = \cos x$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \underline{\int e^x \sin x\,dx}$$

← SAMA KUIN ALUSSA, MUTTA −MERKKI

$$\Rightarrow 2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C'$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C}}$$

Esim. $\int \ln x \, dx = ?$

$f'(x) = 1$

$g(x) = \ln x$

$g'(x) = 1/x$

$f(x) = x$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \underline{\underline{x \ln x - x + C}}$$

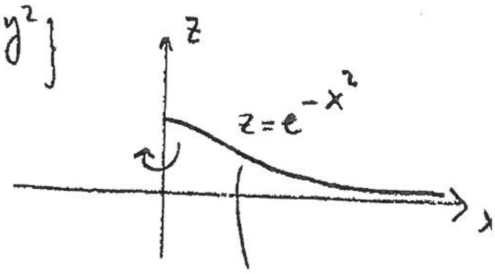
Tosin: Samalla vaivalla, kun keksitään valita $f'(x) = 1$, voidaan myös kokeilla:

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = \ln x + \frac{d}{dx} x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x \ln x - x\right) = \ln x .$$

Esim. Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus kahdella eri tavalla: KUVA!

$$\text{KAPPALE} = \{ (x,y,z) \mid 0 \le z \le e^{-x^2-y^2} \}$$



$x = \sqrt{-\ln z}$

$0 < z \le 1$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{-\ln z}\right)^2 dz = -\pi \int_0^1 \ln z \, dz$$

$$= -\pi \Big/_0^1 (z \ln z - z) = \underline{\underline{\pi}}, \text{ koska } z \ln z \to 0, \text{ kun } z \to 0+$$

Viipaloimalla: $y = \text{VAKIO}$, poikkileikkauksen ala

$$A(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx = e^{-y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{\equiv I} = e^{-y^2} \cdot I$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\infty}^{\infty} A(y) \, dy = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \underline{\underline{I^2}}$$

Verrataan tuloksia

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Sijoitusmenetelmä

Ketjusääntö (= yhd. funktion derivoimissääntö):

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$$

Tärkein sovellus määrätyissä integraaleissa:

Lause Olkoon f jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva ja monotoninen välillä $[a,b]$,
$g(a) = A$, $g(b) = B$. Silloin

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_A^B f(u)\, du.$$

[Symbolisesti: Sijoitus $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$

$\Rightarrow du = g'(x)\, dx$

$x = a \Rightarrow u = g(a) = A$

$x = b \Rightarrow u = g(b) = B$

Tod. Olkoon $F'(u) = f(u)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \Big/_a^b F(g(x)) = F(g(b)) - F(g(a)) = F(B) - F(A)$$

$$= \Big/_A^B F(u) = \int_A^B f(u)\, du. \quad \square$$

17.

Huom: $u = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(u) \Rightarrow dx = (g^{-1})'(u)\,du$

$$= \frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\,du = \frac{1}{g'(x)}\,du$$

$\Rightarrow du = g'(x)\,dx$ sama kuin edellä

(Adamsin kirjassa nämä käs. erikseen)

Esim. (Helppo nopeasti)

$$\int_0^2 \sqrt{3x+1}\,dx \underset{\uparrow}{=}$$

$$\begin{cases} u = 3x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(u-1) \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\,du \\ x = 0 \Rightarrow u = 3\cdot 0+1 = 1 \\ x = 2 \Rightarrow u = 3\cdot 2+1 = 7 \end{cases}$$

$$= \int_1^7 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int_1^7 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\Big/_1^7 u^{3/2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\left(7\sqrt{7}-1\right)}}$$

Esim. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ sij. $x = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$ int. välillä)

$\Rightarrow dx = 2u\,du$

$x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{0} = 0$

$x = \pi^2 \Rightarrow u = \sqrt{\pi^2} = \pi$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\cancel{u}}\cdot 2\cancel{u}\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin u\,du = \underline{\underline{4.}}$$

$$= -2\Big/_0^{\pi} \cos u = -2(-1-1) = 4$$

Esim. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

sij. $x+1 = 2u$
$\Leftrightarrow u = \dfrac{x+1}{2}$
$dx = 2\,du$
$x = 0 \Rightarrow u = 1/2$
$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{2\,du}{4u^2+4} = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \Big/_{1/2}^{1} \arctan u = \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \arctan \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan \tfrac{1}{2}$$

LOPUT SIJOITUSMENETELMÄN ESIMERKIT OHEISLUKEMISTA!

Parillisen/parittoman funktion integraali

f pariton: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

f parillinen: $f(-x) = f(x) \quad \forall x$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

TOD

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

SIJ. JÄLK.

$x = -t$

$\Rightarrow dx = -dt$

$x = -a \Rightarrow t = a$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$= -\int_{a}^{0} \underbrace{f(-t)}_{f(t)}\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$