VIIKKO 6, LASKARIVINKKEJÄ

- YHTÄLÖITÄ PITÄÄ USEIN MUOKATA HELPOMMIKSI JAKAMALLA, KERTOMALLA, SIJOITTAMALLA JNE.
- OSA YHTÄLÖISTÄ ON RATKAISTAVISSA VIIKON 5 TAVOILLA:
  - SEPAROITUVAT
  - RATKAISUKAAVALLA
  - RATKAISEMALLA HOMOG. YHT. JA EPÄHOMOG. YHT.
- LISÄKSI TÄLLÄ VIIKOLLA ON VIELÄ KAKSI YHTÄLÖTYYPPIÄ:
  - EKSAKTIT YHTÄLÖT $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
  - LINEAARISET 2-KERTALUVUN VAKIOKERTOIMISET YHTÄLÖT $y'' + ay' + by = q(x)$, a, b VAKIOITA

EKSAKTIT YHTÄLÖT, TEORIA LYHYESTI

FUNKTIOIDEN KUVAAJAT JA MONET TASOKÄYRÄT VOIDAAN ESITTÄÄ MUODOSSA

$f(x, y) = \text{VAKIO}$

ESIM. $f(x, y) = y - x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2$

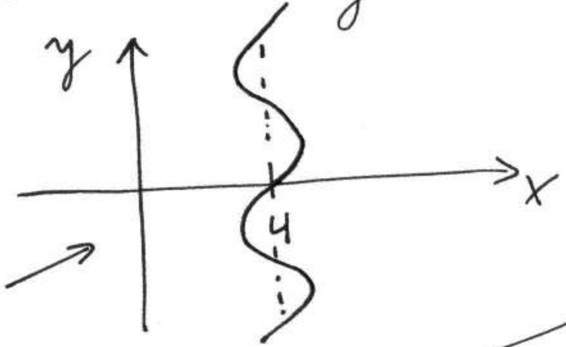
PARAABELI

$f(x, y) = x^2 + y^2 = R^2$

YMPYRÄ

$f(x, y) = x - \sin y = 4$

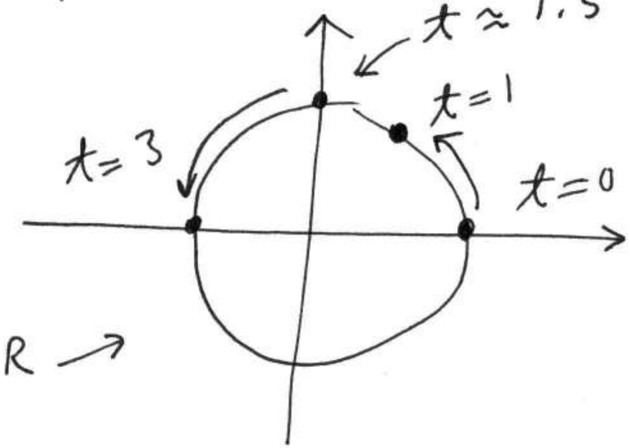
$\Rightarrow x = 4 + \sin y$



TARKASTELLAAN KÄYRÄLLÄ $f(x, y) = C$, C VAKIO, KULKEVAA PISTETTÄ $p(t)$ HETKELLÄ $t \in \mathbb{R}$. SIIS $p(t) = (x, y) = (x(t), y(t))$,

ESIM. $(x(t), y(t)) = (R\cos(t), R\sin(t))$

$f(x, y) = x^2 + y^2 = R^2$



SÄDE R

RATKAISUSTA YHTÄLÖÖN

SIIS $f(x(t), y(t)) = C$ = VAKIO $\|$ DERIVOIDAAN t:N SUHTEEN, KÄYTETÄÄN KETJUSÄÄNTÖÄ:

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \quad \| \cdot dt$$

FUNKTION f OSITTAISDERIVAATTA MUUTTUJAN y SUHTEEN

ESIM. $f(x,y) = x^2y^3 + \sin(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 0$$

$$\Rightarrow df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\Rightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

YHTÄLÖSTÄ RATKAISUUN

JOS ON ANNETTU YHTÄLÖ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (*)

JA LÖYTYY $f(x,y)$, JOLLE

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = M(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = N(x,y) \end{cases}$$

NIIN YHTÄLÖN RATKAISU ON

$f(x,y) = \text{VAKIO}$

JA YHTÄLÖÄ KUTSUTAAN EKSAKTIKSI.

- EKSAKTIUDEN TARKISTAMINEN TYÖKALUT

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{EKSAKTI}}$$

DERIVOINNIN JÄRJESTYSTÄ SAA LÄHES AINA MUUTTAA

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{JA} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} N \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

- FUNKTION f ETSIMINEN

ESIM. $\underbrace{(2xy^3 + 4x^3)}_{M}dx + \underbrace{(3x^2y^2 + 7y^6)}_{N}dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 \qquad \text{SAMAT!}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 \qquad \text{SIIS LÖYTYY } f$$

$$M = 2xy^3 + 4x^3 \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = x^2y^3 + x^4 + C(y)$$

$$N = 3x^2y^2 + 7y^6 \xrightarrow{\int dy} f(x,y) = x^2y^3 + y^7 + C(x)$$

AHAA! $C(y) = y^7$

$$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{x^2y^3 + x^4 + y^7 = \text{VAKIO}}_{\text{RATKAISU YHTÄLÖLLE}}$$

INTEGROIVA TEKIJÄ

JOSKUS YHTÄLÖ

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

EI OLE EKSAKTI, MUTTA MUUTTUU EKSAKTIKSI, JOS SE KERROTAAN PUOLITTAIN SOPIVALLA FUNKTIOLLA $\mu(x,y)$ JOTA KUTSUTAAN "INTEGROIVAKSI TEKIJÄKSI".

KIRJAIN "MYY"

ESIM. YHTÄLÖN

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

INTEGROIVA TEKIJÄ ON $e^{\int p(x)\,dx}$, KOSKA

$$\underbrace{y' e^{\int p(x)\,dx} + p(x)\,y\,e^{\int p(x)\,dx}} = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}$$

AHAA! TÄMÄ ON

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\right)$$

JA VOIDAAN INTEGROIDA PUOLITTAIN

$\longrightarrow \ldots \longrightarrow$ RATKAISUKAAVA

VINKIT

ALKUVIIKKO

1. JAA LUVULLA x^2

TEE MUUTTUJANVAIHTO $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

SEPAROI SAATU Z:N YHTÄLÖ

2. TEHTÄVÄNANTO KERTOO VINKIT

3. —"—

4. TEE MUUTTUJANVAIHTO $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

SEPAROI SAATU Z:N YHTÄLÖ

LOPPUVIIKKO

1. TAAS SAMA VINKKI

2. KERRO PUOLITTAIN LUVULLA e^x $\Rightarrow$ TULEE EKSAKTI YHTÄLÖ

3 - 6 LUENTOMUISTIINPANOT / LUENTORUNKO