Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (MS-A0105), syksy 2016
Alkuviikko 6, tuntitehtävien malliratkaisut

Eksaktit yhtälöt
DY muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, jossa $M, N \colon D \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$, on *eksakti*, jos löytyy sellainen jatkuvasti derivoituva potentiaali (integraalifunktio) $F \colon D \to \mathbb{R}$, että

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in D.$$

Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat yhtälön $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, implisiittisiä ratkaisuja.

Nk. *eksaktisuuslause* takaa, että kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva potentiaali $F \colon D \to \mathbb{R}$ on olemassa yhdesti yhtenäisessä alueessa $D \subset \mathbb{R}$ (erityisesti silloin kun D on reiätön ja suorakaiteen muotoinen alue), mikäli alueessa D jatkuvasti derivoituville funktioille M ja N pätee

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in D.$$

Kääntäen, potentiaalia F ei ole olemassa, mikäli yllä oleva ehto ei toteudu jatkuvasti derivoituville funktioille M ja N yhdesti yhtenäisessä alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

Muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ oleva yhtälö ei yleensä ole eksakti, mutta sille voi yrittää hakea integroivaa tekijää $(x,y) \mapsto \mu(x,y)$ siten, että muunnettu yhtälö $\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$ on eksakti. Sopivan integroivan tekijän voi löytää kokeilemalla, mutta yleisesti sellaisen löytäminen voi olla haastavaa. Yksi tapa, jolla voi yrittää hakea integroivaa tekijää perustuu yllä esitettyyn eksaktisuuslauseeseen vaatimalla, että

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)) \\
&\Leftrightarrow M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \\
&\Leftrightarrow M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right).
\end{aligned}$$

ODY:iden ratkaisemiseen emme tällä kurssilla mene, mutta tehtävä yksinkertaistuu merkittävästi, mikäli yhtälölle löytyy integroiva tekijä, joka riippuu vain jommasta kummasta muuttujasta x tai y. Tämä ehto on helppo tarkistaa sillä integroiva tekijä μ riippuu esimerkiksi vain muuttujasta x, jos termi

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

on mahdollista sieventää sellaiseen muotoon, jossa y ei esiinny. Tällöin yllä oleva ODY voidaan muuttaa tavalliseksi DY:ksi

$$-N(x,y)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\mu(x)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

eli voidaan ratkaista μ DY:stä

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right). \tag{1}$$

Päättely on vastaavanlainen, mikäli μ riippuu vain muuttujasta y sillä muuttujien x ja y roolit vain vaihdetaan päättelyssä päikkäin. Toisin sanoen, jos

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

on pelkästään y:n funktio, niin integroiva tekijä $y\mapsto\mu(y)$ voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right).$$