MS-A0102 Differentiaali ja integraalilaskenta 1 **Huusko**

Tehtävät 4, ma 5. - pe 9.6.

Tavoite:

- tehtävät 1-4 käydään läpi alkuviikon harjoitustilaisuudessa (ma klo 14-16, lähiopetus)
- tehtävät 5-7 käydään läpi loppuviikon harjoitustilaisuudessa (to klo 9-11, online)
- tehtävät 8-10 palautetaan MyCourses-alustalle

Viikon aiheet liittyvät **Alkeisfunktioihin, derivointiin ja integrointiin** . Harjoitustehtäviin liittyvää materiaalia löytyy kurssikirjasta **Adams & Essex, Calculus, A Complete Course (8th Edition) 3., 4., 5. ja 6.**

1. Oletetaan, että epidemiaan sairastuneiden määrää mallintaa logistinen funktio f, joka määräytyy ehdosta
$$f(t) = \frac{L}{1 + M\mathrm{e}^{-kt}},$$
missä t mittaa aikaa kuukausina epidemian puhkeamisen havaitsemisesta. Alussa havaittiin 200 sairastunutta ja kuukaudessa sairastuneiden määrä nousi 1000:n. Lopulta sairastuneita oli 10000.

   (a) Määrää parametrien L, M ja k arvot.

   (b) Kuinka moni oli sairastunut kolmen kuukauden aikana epidemian puhkeamisen havaitsemisesta lähtien?

   (c) Kuinka nopeasti sairastuneiden lukumäärä kasvoi kolmen kuukauden kohdalla?

2. Olkoon f pisteessä $x = 0$ jatkuva funktio, joka toteuttaa epäyhtälöt
$$\frac{x}{\ln(1+x)} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$
origon ympäristössä. Määrää $f(0)$.

3. Millä vakion k arvoilla raja-arvo

   (a) $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cosh kx$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh kx}{\cosh 2x}$

   on äärellinen?

4. Määrää funktion $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ ääriarvokohdat ja käännepisteet. Piirrä kuvaaja.

5. Kahden pylvään väliin kiinnitetty voimalinja roikkuu ehdon
$$f(x) = \frac{T}{\omega}\cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$$
määräämän funktion graafin muotoisena ketjukäyränä. Vakio T esittää kaapelin jännitystä käyrän matalimmassa pisteessä ja ω on kaapelin paino pituusyksikköä kohti.

(a) Oletetaan, että kaapeli on kiinnitetty muuttujan $x = -T/\omega$ ja $x = T/\omega$ arvoja vastaaviin pisteisiin. Määrää käyrän 'notkolle' (= käyrän korkeimman ja matalimman pisteen välinen erotus) lauseke.

(b) Osoita, että f toteuttaa yhtälön

$$f''(x) = \frac{\omega}{T}\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

6. 90°C-asteinen kahvi laitetaan 20°C-asteiseen huoneeseen alkuhetkellä $t = 0$. Kahvin lämpötila muuttuu nopeudella $r(t) = -7\mathrm{e}^{-0,1t}$°C minuutissa, kun aika t esitetään minuutteina. Arvioi kahvin lämpötila 10 minuutin kuluttua.

7. Vuonna 2010 Meksikon väestö kasvoi 1,1% vuodessa. Oletetaan, että sama kasvunopeus jatkuu tulevaisuuteen ja muuttuja t esittää aikaa vuosina vuodesta 2010 alkaen. Tällöin Meksikon väestö voidaan esittää (miljoonina) ajan funktiona muodossa $P(t) = 112(1,011)^t$.

   (a) Arvioi Meksikon keskimääräinen väestö vuosien 2010 ja 2050 välillä.
   (b) Määrää vuosien 2010 ja 2050 väestöjen keskiarvo.
   (c) Mistä johtuu (a) ja (b) kohtien vastausten ero?

Palautettavat tehtävät

8. Määrää integraalit

   (a) $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$
   (b) $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$
   (c) $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$
   (d) $\int \frac{x}{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$

9. Määrää seuraavat integraalit jos ne suppenevat.

   (a) $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
   (b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$
   (c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \mathrm{d}x$
   (d) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$

10. Osoita sopivan sijoituksen avulla, että seuraavat integraalit ovat samoja.

   (a) $\int_0^{\pi/3} 3\sin^2(3x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^2(y)\mathrm{d}y$
   (b) $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^3 \mathrm{d}x = \int_0^1 y^3 \mathrm{e}^y \mathrm{d}y$
   (c) $\int_1^2 2\ln(x^2+1)\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y$
   (d) $\int_0^\pi x\cos(\pi - x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (\pi - y)\cos y \mathrm{d}y$