TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN JA TILASTOTIETEEN PERUSKURSSI. 26.2.–16.4.2024. Aalto-yliopisto. Yliopistonlehtori Pekka Pere.

11 Lisää luottamusväleistä

11.1 Waldin luottamusväli osuudelle

Binomijakauman todennäköisyyden π:n eli osuuden luottamusväli on käytetyimpiä luottamusvälejä. Tilastotieteen perusoppikirjoissa järjestään opetetaan menettely alla sen laskemiseksi. Johto lähtee osuuden estimaattorin $\hat{\pi} = Y/n$ normaalisuudesta suurilla havaintomäärillä:

$$\hat{\pi} \sim \mathsf{N}(\pi, \pi(1-\pi)/n).$$

Tällöin pätee likimäärin

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{z}_{\alpha/2} < \frac{\hat{\pi}-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} < \mathsf{z}_{1-\alpha/2}\right)$$
$$\mathsf{P}\left(-\mathsf{z}_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{\pi}-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} < \mathsf{z}_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Tässä $\mathsf{z}_{\alpha/2} = -\mathsf{z}_{1-\alpha/2}$ on standardinormaalijakauman $\alpha/2$. kvantiili (esim. $\mathsf{z}_{0.025} = -\mathsf{z}_{0.975} = -1.960$). Estimoidaan estimaattorin $\hat{\pi}$ nimittäjässä varianssi $\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n$:llä. Näin saadaan likimääräiset yhtälöt

$$\mathsf{P}\left(-\mathsf{z}_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{\pi}-\pi}{\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n}} < \mathsf{z}_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\mathsf{P}\left(\hat{\pi} - \mathsf{z}_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} < \pi < \hat{\pi} + \mathsf{z}_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right) \approx 1-\alpha.$$

Osuuden $100 \times (1-\alpha)$ %:n likimääräisen luottamusvälin ylä- ja alaraja ovat

$$\hat{\pi} \pm \mathsf{z}_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}. \tag{1}$$

Jos havaintoja on paljon eikä π ole lähellä nollaa tai yhtä, luottamusvälin peittävyys on noin $100 \times (1-\alpha)$ %. Väliä (1) kutsutaan tässä Waldin luottamusväliksi tilastotieteilijä Abraham Waldin mukaan.

Luottamusvälin leveys riippuu luottamustasosta $1-\alpha$, π:n suuruudesta ja otoskoosta n. Luottamustason kasvattaminen $(1-\alpha)$:sta $(1-\alpha^*)$:iin leventää luottamusväliä ($\alpha^* < \alpha$). Tällöin luottamusvälin leveyden määräävä termi suurenee: $\mathsf{z}_{1-\alpha^*/2}[\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n]^{1/2} > \mathsf{z}_{1-\alpha/2}[\hat{\pi}(1-\hat{\pi})/n]^{1/2}$, koska $\mathsf{z}_{1-\alpha^*/2} > \mathsf{z}_{1-\alpha/2}$.

Esimerkki. Luottamusvälin leveys ja luottamustaso. Olkoon $\hat{\pi} = 0.5$ ja $n = 100$. Jos luottamustaso on 0.95, niin $\alpha = 0.05$ ja $\mathsf{z}_{1-\alpha/2} = 1.960$. Jos luottamustaso on 0.99, niin $\alpha = 0.01$ ja $\mathsf{z}_{1-\alpha/2} = 2.576$. Standardinormaalijakauman 0.975.

ja 0.995. kvantiilit 1.960 ja 2.576 on laskettu R-komennoilla `qnorm(0.975)` ja `qnorm(0.995)`. Kaksisuuntaisen 95 %:n luottamusvälin rajat ovat

$$0.5 \pm 1.960\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.5 \pm 1.960 \times 0.05 = 0.5 \pm 0.098,$$

eli luottamusväli on

$$[0.402, 0.598].$$

Kaksisuuntaisen 99 %:n luottamusvälin rajat ovat

$$0.5 \pm 2.576\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.5 \pm 2.576 \times 0.05 = 0.5 \pm 0.1288,$$

jolloin luottamusväli on

$$[0.371, 0.629].$$

Luottamustason suurentaminen leventää luottamusvälin pituuden $0.598-0.402 = 0.196$:sta $0.630 - 0.371 = 0.258$:aan.

Edelliset luottamusvälit selviävät kätevästi mosaic-paketin komennoilla:

```
install.packages("mosaic")
library(mosaic)
binom.test(x=50,n=100,conf.level=0.95,ci.method="Wald")
binom.test(x=50,n=100,conf.level=0.99,ci.method="Wald")
```

□

Luottamusväli tapaa olla sitä leveämpi, mitä lähempänä π ja siten $\hat{\pi}$ on 0.5:ttä. Ääriarvoja 0 tai 1 lähellä olevat osuudet estimoituvat tarkemmin kuin 0.5:n tienoilla olevat. Kuva 1 havainnollistaa tuloa $\pi(1-\pi)$, kun $\pi \in [0, 1]$.

Otoskoon n kasvattaminen kuristaa luottamusväliä, koska n:n suuretessa luottamusvälin (1) neliöjuuritermi pienenee. Luottamusväli kapenee kuitenkin hitaammin kuin n suurenee.

Esimerkki. Estimaatin $\hat{\pi}$ pysyessä samana luottamusvälin (1) leveys puolittuu, jos n nelinkertaistuu:

$$1.960 \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{4n}} = \frac{1}{2} \times 1.960 \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}.$$

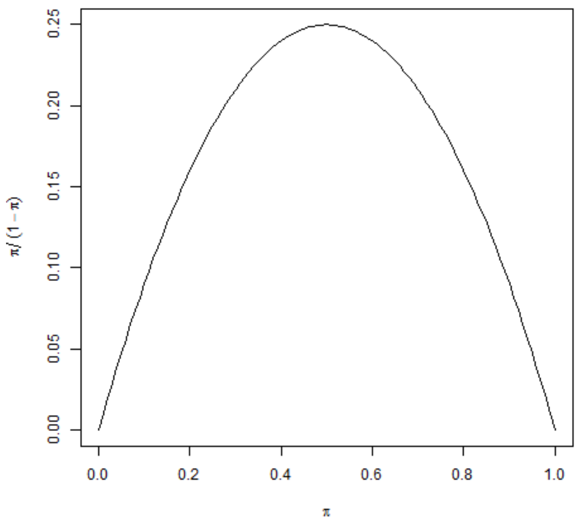
Vasemmalla on kaksisuuntaisen luottamusvälin puolikas, kun otoskoko on $4n$. Oikealla on 1/2:lla kerrottuna otoskoolla n pätevän kaksisuuntaisen luottamusvälin (1) puolikas. □

On esitetty peukalosääntöjä, joiden pätiessä approksimaation (1) pitäisi toimia.[1] Luottamusvälin (1) peittävyys voi olla paljon pienempi kuin $100 \times (1-\alpha)$ %, vaikka peukalosäännön mukaan approksimaatio olisi pätevä.

Esimerkki. Osuuden luottamusvälin (1) peittävyys.[2] Jos havaintoja on 25 ja π on noin 0.05, niin 95 %:n luottamusvälin (1) peittotodennäköisyys on noin 70 %. □

[1] Esim. "$n\pi > 10$ ja $n(1-\pi) > 10$", "$n\pi(1-\pi) \geq 10$" tai "$n\pi - 3[n\pi(1-\pi)]^{1/2} > 0$ ja $n\pi + 3[n\pi(1-\pi)]^{1/2} < n$".

[2] Agresti (2013, 604).



Kuva 1: Todennäköisyys π ja tulo $\pi(1-\pi)$.

Esimerkki. Luottamusväli, jos tapahtumia ei ole. Jos $\hat{\pi} = y/n = 0/n = 0$, luottamusväli (1) typistyy pisteeksi $[0, 0]$ kaikilla luottamustasoilla. Se on epätyydyttävää: Jos voitaisiin olla varmoja, että tapahtuman todennäköisyys on 0, luottamusväliä ei olisi laskettu. □

Newcombista (1998a, 868) luottamusväliä (1) ei tulisi käyttää tieteellisessä tutkimuksessa ja sen käyttö tulisi rajata otoskoon suunnitteluun ja opetustarkoituksiin. Andersson (2023), Fagerland ym. (2017, 65), Meeker ym. (2017, 105, 108) sekä Schilling ja Doi (2014) arvioivat luottamusväliä (1) samaan tapaan.

11.2 Luottamusvälien ja testien yhteys

Tarkastellaan kaksisuuntaisen testin merkitsevyystasolla α ja samasta testisuureesta muodostetun kaksisuuntaisen $100 \times (1-\alpha)$ %:n luottamusvälin yhteyttä. Oletetaan yksinkertaisuuden ja konkreettisuuden vuoksi, että havainnot noudattavat normaalijakaumaa $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, testataan nollahypoteesia "odotusarvo on μ", varianssin estimaatti on $s^2 > 0$, $n > 0$ on otoskoko, testisuure on $(\hat{\mu} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ ja sen kriittiset arvot ovat $\mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1) < 0$, $\mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1) > 0$ ja $-\mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1) = \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)$. Tällöin pätee, että

$$
\begin{aligned}
1 - \alpha &= \mathsf{P}\left(\mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\hat{\mu} - \mu}{s/\sqrt{n}} < \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \hat{\mu} - \mu < \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathsf{P}\left(-\hat{\mu} + \mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < -\mu < -\hat{\mu} + \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{P}\left(\hat{\mu} - \mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} > \mu > \hat{\mu} - \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\hat{\mu} - \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

Ensimmäisen rivin mukaan riippumattomissa toistokokeissa testisuureen $(\hat{\mu} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ arvo osuu todennäköisyydellä $1-\alpha$ välille $(\mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1), \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1))$. Mikäli näin käy, nollahypoteesi jää voimaan. Jos testisuureen arvo sijoittuu välin $(\mathsf{t}_{\alpha/2}(n-1), \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1))$ ulkopuolelle, nollahypoteesi hylätään.

Viimeisen rivin muoto on tuttu luottamusvälin lausekkeista edellä: Riippumattomissa toistokokeissa väli

$$
\left(\hat{\mu} - \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\ \hat{\mu} + \mathsf{t}_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)
$$

peittää odotusarvon μ todennäköisyydellä $1-\alpha$.

Jos testisuure sijoittuu kriittisten arvojen väliin, yhtälöketjun ensimmäisellä rivillä olevat epäyhtälöt pätevät, eikä nollahypoteesia hylätä. Tällöin yhtälöketjun viimeisellä rivillä olevat epäyhtälöt pätevät eli luottamusväli peittää μ:n. Jos nollahypoteesia, että odotusarvo on μ ei hylätä, testin merkitsevyystasoa $100 \times \alpha$ %:a vastaava $100 \times (1-\alpha)$ %:n luottamusväli peittää μ:n.

Jos testisuure ei sijoitu kriittisten arvojen väliin, yhtälöketjun yllä ensimmäisellä rivillä olevat epäyhtälöt eivät päde. Nollahypoteesi hylätään. Tällöin myöskään yhtälöketjun viimeisellä rivillä olevat epäyhtälöt eivät ole voimassa eli luottamusväli ei peitä μ:tä. Jos nollahypoteesi "odotusarvo on μ" hylätään, testin merkitsevyystasoa vastaava luottamusväli ei peitä μ:tä.

11.3 Wilsonin luottamusväli osuudelle

Waldin luottamusvälissä todennäköisyydelle tai osuudelle (π) Bernoulli-satunnaismuuttujan varianssi $\pi(1-\pi)$ estimoidaan $(\hat{\pi}/(1-\hat{\pi}))$. Wilsonin menetelmä muodostaa luottamusväli osuudelle perustuu luottamusvälien ja testien dualiteettiin ja välttää varianssin estimoinnin.

Skooritestisuure

$$
\frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}
$$

testaa nollahypoteesia $\pi = \pi_0$ $(\pi_0 \in (0,1))$. Yllä $\hat{\pi} = y/n$ on estimoitu todennäköisyys, y on tapahtumien ja n havaintojen lukumäärä, π_0 on oletettu arvo todennäköisyydelle, α on testin merkitsevyystaso (esim. 0.05) ja nimittäjässä on nollahypoteesin mukainen varianssi. Keskeisen raja-arvolauseen perusteella testisuure noudattaa suurilla havaintomäärillä standardinormaalijakaumaa.

$100 \times (1-\alpha)$ %:n skooriluottamusväli koostuu niistä π:n arvoista, jotka eivät tule hylätyksi merkitsevyystasolla α skooritestillä (vrt. jakso 11.2). Sen ala- ja ylärajat ovat

$$
\begin{aligned}
&= \hat{\pi}\frac{n}{n+z_{\alpha/2}^2} + \frac{1}{2}\frac{z_{\alpha/2}^2}{n+z_{\alpha/2}^2} \\
&\quad \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n+z_{\alpha/2}^2}\left[\hat{\pi}(1-\hat{\pi})\frac{n}{n+z_{\alpha/2}^2} + \frac{1}{4}\frac{z_{\alpha/2}^2}{n+z_{\alpha/2}^2}\right]}.
\end{aligned}
$$

Edwin Wilson julkaisi tämän luottamusvälin 1927.

Johdetaan Wilsonin luottamusväli. Neliöidään skooritestisuureen ja sen asymptoottiset kriittiset arvot $\pm z_{\alpha/2}$ sitova yhtälö

$$\frac{\hat{\pi}-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}} = \pm z_{\alpha/2}$$

puolittain:

$$\begin{aligned}
\frac{(\hat{\pi}-\pi_0)^2}{\pi_0(1-\pi_0)/n} = (z_{\alpha/2})^2 \quad &\Leftrightarrow \\
n(\hat{\pi}-\pi_0)^2 = z_{\alpha/2}^2\pi_0(1-\pi_0) \quad &\Leftrightarrow \\
n(\hat{\pi}^2 - 2\hat{\pi}\pi_0 + \pi_0^2) - z_{\alpha/2}^2\pi_0 + z_{\alpha/2}^2\pi_0^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
(n+z_{\alpha/2}^2)\pi_0^2 - (2\hat{\pi}n + z_{\alpha/2}^2)\pi_0 + n\hat{\pi}^2 = 0 \qquad | : n \quad &\Leftrightarrow \\
\left(1+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)\pi_0^2 - \left(2\hat{\pi}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)\pi_0 + \hat{\pi}^2 = 0.&
\end{aligned}$$

Merkitään

$$a = 1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} > 0,$$
$$b = -\left(2\hat{\pi}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)$$

ja

$$c = \hat{\pi}^2.$$

Näillä merkinnöillä a)-kohdan yhtälö on muotoa

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

jossa $a \neq 0$. Sen juuret ovat (toisen asteen yhtälön ratkaisukaava):

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Tehtävän tilanteessa juuret ovat

$$\frac{2\hat{\pi}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n} \pm \sqrt{\left(2\hat{\pi}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)^2 - 4\left(1+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)\hat{\pi}^2}}{2\left(1+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)}.$$

Laventamalla osamäärä yllä $n/[2(n+z_{\alpha/2}^2)]$:lla ja järjestelemällä saadaan luottamusvälin ala- ja ylärajat:

$$\frac{n}{2(n+z_{\alpha/2}^2)}\left(2\hat{\pi}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right) \pm \frac{n}{2(n+z_{\alpha/2}^2)}\sqrt{\left(2\hat{\pi}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)^2 - 4\left(1+\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)\hat{\pi}^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{2(n+z^2_{\alpha/2})}\frac{2\hat{\pi}n+z^2_{\alpha/2}}{n} \\
&\quad \pm \frac{n}{2(n+z^2_{\alpha/2})}\sqrt{4\hat{\pi}^2+4\hat{\pi}\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}+\frac{z^4_{\alpha/2}}{n^2}-4\hat{\pi}^2-4\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}\hat{\pi}^2} \\
&= \frac{\hat{\pi}n+z^2_{\alpha/2}/2}{n+z^2_{\alpha/2}} \pm \frac{n}{2(n+z^2_{\alpha/2})}\sqrt{4\frac{z^2_{\alpha/2}}{n^2}\left(\hat{\pi}n-\hat{\pi}^2n+\frac{z^2_{\alpha/2}}{4}\right)} \\
&= \frac{\hat{\pi}n+z^2_{\alpha/2}/2}{n+z^2_{\alpha/2}} \pm \frac{z_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})n+\frac{1}{4}z^2_{\alpha/2}} \\
&= \hat{\pi}\frac{n}{n+z^2_{\alpha/2}}+\frac{1}{2}\frac{z^2_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n+z^2_{\alpha/2}}\left[\hat{\pi}(1-\hat{\pi})\frac{n}{n+z^2_{\alpha/2}}+\frac{1}{4}\frac{z^2_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}}\right]}.
\end{aligned}
$$

Juurten kaavasta nähdään, että skooriluottamusvälin keskipiste on painotettu keskiarvo $\hat{\pi}$:sta ja 1/2:sta:

$$\hat{\pi}\frac{n}{n+z^2_{\alpha/2}}+\frac{1}{2}\frac{z^2_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}}.$$

Painot summautuvat yhdeksi:

$$\frac{n}{n+z^2_{\alpha/2}}+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}}=\frac{n+z^2_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}}=1.$$

Wilsonin luottamusvälin keskipiste on (lähes) aina lähempänä 1/2:ta kuin Waldin luottamusvälin keskipiste SU-estimaattori $\hat{\pi}$. (Jos $\hat{\pi}=1/2$, niin luottamusvälien keskipisteet ovat samat.) Luottamusvälin keskipiste menee kohti $\hat{\pi}$:a n:n kasvaessa kohti ääretöntä. Koska $\hat{\pi}$ on SU-estimaattori ja siten tarkentuva, luottamusvälin keskipiste lähestyy π:tä. Luottamusvälin ala- ja ylärajat määräävät termit

$$\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n+z^2_{\alpha/2}}\left[\hat{\pi}(1-\hat{\pi})\frac{n}{n+z^2_{\alpha/2}}+\frac{1}{4}\frac{z^2_{\alpha/2}}{n+z^2_{\alpha/2}}\right]}$$

menevät kohti nollaa n:n suuretessa. Luottamusvälin ala- ja ylärajat lähenevät siten $\hat{\pi}$:a ja π:tä n:n suuretessa.

Agresti ja Coull (1998) ehdottavat, että edellä osoitettua tapaa laskea luottamusväli kutsuttaisiin Wilsonin menetelmäksi. Heidän mukaansa (mts. 120) sitä voidaan suositella käytettäväksi lähes kaikilla otoskoilla ja π:n arvoilla. Newcombe (1998) arvioi, että Wilsonin menetelmä on ainoa helppolaskuinen todennäköisyyden ja suhteellisen osuuden luottamusväli, joka toimii.[3]

[3]E.B. Wilson (1927): Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference. *Journal of the American Statistical Association*, 22, 209–212. A. Agresti ja B.A. Coull (1998): Approximate Is Better than "Exact" for Interval Estimation of Binomial Proportions. *American Statistician*, 52, 119–126. R.G. Newcombe (1998): Two-Sided Confidence Intervals for the Single Proportion: Comparison of Seven Methods. *Statistics in Medicine*, 17, 857–872.

Esimerkki. Betonirakenteinen Morandi-silta Genovassa Italiassa romahti 14.8.2018. Ihmisiä kuoli 43 ja loukkaantui 16. Sillan kunnosta ei oltu huolehdittu riittävästi.[4]

Liikenneviraston tiedote 12.12.2016:[5]

> Liikennevirasto selvittää betonin lujuusongelmia tekemällä pistokokeita ympäri Suomen. Liikennevirasto käy pistokokeina läpi vuosina 2011–2016 valmistuneiden tiesiltojen lujuuksia ja ilmamääriä. Pistokokeiden kohteena olevat sillat ovat valittu satunnaisotannalla, eikä niihin kohdistu erityisiä epäilyjä ongelmista.

Yle Uutiset 2.1.2017:[6]

> Liikennevirasto – – tutki pistokokein 18 siltaa. Ne on rakennettu vuosina 2011–2016. Pistokokeet paljastivat lujuuspuutteita kuudesta sillasta eri puolilta Suomea.

Lasketaan R:llä 95 %:n (kaksisuuntaiset) Waldin ja Wilsonin luottamusvälit 2011–2016 rakennettujen lujuuspuutteisten siltojen osuudelle Suomessa. Waldin luottamusväli ei ole luotettava näin pienillä havaintomäärillä, joten se lasketaan vain vertailun vuoksi.

Luottamusvälien lasku R:llä:

```
n <- 18; p <- 6/n; q <- 1-p
p-1.959964*sqrt(p*q/n) # qnorm(0.975) palauttaa 1.959964
## [1] 0.1155596
p+1.959964*sqrt(p*q/n)
## [1] 0.5511071.
# Wilsonin luottamusväli saadaan Mosaic-paketin binom.test()-käskyllä:
install.packages("mosaic") # vain pakettia 1. kertaa käytettässä
library(mosaic)
binom.test(x=6,n=18, ci.method = "Wilson", conf.level = 0.95)
##    Exact binomial test (Score CI without continuity correction)
## data:  6 out of 18
## number of successes = 6, number of trials = 18, p-value = 0.2379
## alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
## 95 percent confidence interval:
##  0.1627877 0.5625053
```

Wilsonin luottamusväli on $(0.16, 0.56)$. Väli on melko leveä, koska havaintoja on vähän. Waldin luottamusväli $(0.12, 0.55)$ on vielä leveämpi. Erityisesti alarajat eroavat. Wilsonin luottamusväli on luotettavampi. Sen mukaan lujuuspuutteita voi olla useammassa kuin joka toisessa betonisillassa. □

---

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Ponte_Morandi` (luettu 7.2.2024).

[5] `https://vayla.fi/-/liikennevirasto-tarkistaa-pistokokeena-siltoja-ympari-suomen` (haettu 1.2.2021).

[6] `https://yle.fi/uutiset/3-9382999` (haettu 15.4.2020).