MS-A0102 Differentiaali ja integraalilaskenta 1 **Huusko**

Tehtävät 5, ma 12. - pe 16.6.

Tavoite:

- tehtävät 1-4 käydään läpi alkuviikon harjoitustilaisuudessa (ma klo 14-16, lähiopetus)
- tehtävät 5-7 käydään läpi loppuviikon harjoitustilaisuudessa (to klo 9-11, online)
- tehtävät 8-10 palautetaan MyCourses-alustalle

1. Integraalia
$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)dx$$
voi arvioida Matlabilla tai Octave Onlinella (voi käyttää verkossa sivulla `https://octave-online.net/`) koodilla

```
a=0;
b=pi;
x=linspace(a,b,101);
dx=x(2)-x(1);
I=sum(sin(x)*dx)
```

Matlab tuottaa tuloksen $I = 1.9998$. (Arvio käyttää vasemman päätepisteen sääntöä, luku I on tiettyjen 100 suorakulmion pinta-alojen summa.)

Arvioi integraaleja $\int_0^1 e^x dx$, $\int_0^{\pi/4} \cos(x)dx$ ja $\int_0^3 x^2 dx$ samaan tapaan

2. Integraalia
$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
voi arvioide Matlabilla koodilla

```
a=0;b=1;
m=0;M=1;
n=10000;
x=a+(b-a)*rand(1,n);
y=m+(M-m)*rand(1,n);
s=0;
for k=1:n
if y(k)<(1/sqrt(2*pi))*exp(-0.5*x(k).^2), s=s+1;
end
end
A=(M-m)*(b-a)
I=A*s/n;
```

Matlab tuotti 26.1.2023 lukuarvon $I = 0.3483$. (Arvio käyttää Monte Carlo -menetelmää. Yhteensä $n = 10000$ satunnaista pistettä laitettiin suorakulmioon

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b, m \leq y \leq M\} \quad \text{of area} \quad A = (M - m)(b - a).$$

Yhteensä s pistettä löytyi käyrän $y = f(x)$ alapuolelta. Todennäköisyyksien perusteella $I/A = s/n$, mistä voidaan ratkaista arvio luvulle I.)

Arvioi integraaleja $\int_0^1 e^x dx$, $\int_0^{\pi/4} \cos(x) dx$ ja $\int_0^3 x^2 dx$ samaan tapaan.

3. Oletetaan, että $|x|$ on pieni ja tehdään arvio

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Käytä tätä arviota ja johda Taylorin polynomi funktiolle e^{-x^2}. Edelleen laske arvio integraalille

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

korvaamalla integroitava funktio kyseisellä Taylorin polynomilla.

4. Oletetaan, että $|x|$ on pieni ja tehdään arvio

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Käytä tätä arviota ja johda Taylorin polynomi funktiolle $\frac{\sin(x)}{x}$. Edelleen laske arvio integraalille

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

korvaamalla integroitava funktio kyseisellä Taylorin polynomilla.

5. Etsi vakiot A ja B siten, että

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}.$$

Laske

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x+2)} dx.$$

6. Etsi polynomit $q(x)$ ja $r(x)$, missä $r(x)$ on astetta 1 oleva polynomi, ja vakiot C ja D siten, että

$$\frac{x^3}{x(x+2)} = q(x) + \frac{p(x)}{x(x+2)} = q(x) + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+2}.$$

Laske

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x(x+2)} dx.$$

7. Koska
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{pätee} \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C.$$

(a) Laske
$$\int_1^2 \frac{1}{4+x^2}dx.$$

(b) Etsi vakiot a ja b siten, että $x^2 - 4x + 7 = (x-a)^2 + b$. Laske
$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-4x+7}dx.$$

8. Etsi yleinen ratkaisu kullekin differentiaaliyhtälölle

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3\mathrm{e}^x$

(b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8\mathrm{e}^{-x}$

(c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -5\cos(6x)$

(d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sin(7x)$

9. Ratkaise separoituva yhtälö
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+1}{x}.$$
Millä muuttujan arvoilla $x \in \mathbb{R}$ yhtälö on määritelty?

10. Etsi yleinen ratkaisu yhtälölle
$$y''(x) - \cos x = 3.$$
Etsi ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 1 = y'(0)$.