

Tehtävät 6, ma 19. - pe 23.6.

Tavoite:

- tehtävät 1-4 käydään läpi alkuviikon harjoitustilaisuudessa (ma klo 14-16, lähiopetus)
- tehtävät 5-7 käydään läpi loppuviikon harjoitustilaisuudessa (to klo 9-11, online)
- tehtävät 8-10 palautetaan MyCourses-alustalle

1. Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö $x - y^2y' = 0$:

- Kirjoita $y' = \frac{dy}{dx}$ ja järjestele yhtälö muotoon $f(x)dx = g(y)dy$.
- Integroi puolittain. Lisää integroimisvakio toiselle puolelle.
- Ratkaise y , jos voit. (Jos et voi, sait ratkaisun implisiittisessä muodossa.)

2. Ratkaise separoituva yhtälö $y' = y^2x^3$.3. Ratkaise toisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen yhtälö $y'' - 2y' - 15y = 0$:

- Kirjoita $y(x) = e^{\lambda x}$, missä λ on vakio. Näytä, että karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$ täytyy päteä.
- Etsi ratkaisut λ_1 ja λ_2 karakteristiselle yhtälölle.
- Kirjoita yleinen ratkaisu. On kolme vaihtoehtoa.
 - Jos λ_1 ja λ_2 ovat reaaliset ja erisuuret, niin

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}.$$

- Jos $\lambda_1 = \lambda_2$, niin

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}.$$

- Jos $\lambda_1 = a + bi$ ja $\lambda_2 = a - bi$, niin

$$y(x) = e^{ax}(A \cos(bx) + B \sin(bx)).$$

Tässä A ja B ovat vakioita.

4. Tarkastellaan kahta lineaarista toisen kertaluvun yhtälöä.

- Ratkaise yhtälö $y'' - 4y' + 4y = 0$.
- Näytä, että $\lambda_1 = 1 + i$ ja $\lambda_2 = 1 - i$ ovat yhtälön

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

ratkaisuja. Käytä tätä ja ratkaise yhtälö

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Koealue päättyy tähän

5. Ratkaise eksakti yhtälö $2x + 1 + 2xy + (x^2 + 4y^3)y' = 0$:
- (a) Etsi $L = L(x, y)$ ja $M = M(x, y)$ siten, että yhtälö on muotoa $L(x, y) + M(x, y)y' = 0$.
 - (b) Tarkista, että $\frac{\partial}{\partial y}L = \frac{\partial}{\partial x}M$. Tämä osoittaa, että yhtälö on eksakti.
 - (c) Etsi $f = f(x, y)$ siten, että $\frac{\partial}{\partial x}f = L$ ja $\frac{\partial}{\partial y}f = M$. (Funktio f on yhtälön integraalifunktio tai potentiaali.)
 - (d) Mitä ovat funktion $f(x, y)$ tasa-arvokäyrät?
 - (e) Jos f on yhtälön integraalifunktio, niin onko aina välttämättä $f + C$, missä C on vakio, myös ratkaisu yhtälölle?
 - (f) Onko yhtälöllä $2 + \frac{1}{x} + 2y + (x + 4\frac{y^3}{x})y' = 0$ samat ratkaisut?
6. Ratkaise eksakti yhtälö $y \sin(x) + xy \cos(x) + (x \sin(x) + 1)y' = 0$.
7. Ratkaise ensimmäisen kertaluvun yhtälö $xy' - 3y = x^5$, kun $x > 0$:
- (a) Kirjoita yhtälö normaalimuodossa $y' + p(x)y = q(x)$.
 - (b) Etsi integroiva tekijä $x \mapsto e^{u(x)}$, missä $u(x) = \int p(x)dx$.
 - (c) Kerro normaalimuotoinen yhtälö integroivalla tekijällä.
 - (d) Integroi puolittain muuttujan x suhteen.

Palautettavat tehtävät

8. Ensimmäisen kertaluvun lineaarisen yhtälön $y' + p(x)y = q(x)$ ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

- (a) Ratkaise yhtälö $y' + 2xy = 0$.
 - (b) Ratkaise yhtälö $y' + 2xy = x$.
9. Ratkaise alkuarvo-ongelmat. (Etsi yleinen ratkaisu ja etsi sopivat vakiot A ja B .)
- (a) $2y'' + 8y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$,
 - (b) $2y'' + 12y' + 18y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
10. Etsi lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on
- (a) $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$,
 - (b) $y(x) = c_1 + c_2 e^{-5x}$,
 - (c) $y(x) = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$,
 - (d) $y(x) = c_1 e^{-x} \sin 2x + c_2 e^{-x} \cos 2x$,
 - (e) $y(x) = c_1 + c_2 x$.