1. a) $f(t) = \dfrac{L}{1 + Me^{-kt}}$

Tiedetään, että:

$f(0) = 200$, (1)

$f(1) = 1000$ (2)

$\lim_{t \to \infty} f(t) = 10\,000$ (3)

Siispä:

$$200 = \frac{L}{1 + M} \quad (1)$$

$$1000 = \frac{L}{1 + \frac{M}{e^{k}}} \quad (2)$$

$$10\,000 = L \quad (3)$$

eli $200 = \frac{10\,000}{1+M}$

$\Rightarrow 200 + 200M = 10\,000$

$2 + 2M = 100$

$M = 49$

siis

$1000 = \frac{10000}{1 + \frac{49}{e^k}}$, sij $A = e^{-k}$

$1000(1 + 49A) = 10000$

$1 + 49A = 10$

$A = \frac{9}{49}$

$e^{-k} = \frac{9}{49}$

$-k = \ln\left(\frac{9}{49}\right)$

$k = \ln\left(\frac{49}{9}\right)$

1. b) $$f(3) = \frac{L}{1 + Me^{-k \cdot 3}}$$

$$-k \cdot 3$$
$$= \ln\left(\frac{9}{49}\right) \cdot 3$$
$$= \ln\left(\left(\frac{9}{49}\right)^3\right)$$

$$= \frac{L}{1 + \left(\frac{9}{49}\right)^3 \cdot M}$$

$$= \frac{10\ 000}{1 + \left(\frac{9}{49}\right)^3 \cdot 49}$$

$$= \frac{10\ 000}{1 + \frac{9^3}{49^2}}$$

$$= 10\ 000 \cdot \left(\frac{9^3 + 49^2}{49^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{10000 \cdot 49^2}{9^3 + 49^2}$$

$$\approx 7670$$

1. c) Lasketaan muutosnopeus eli derivaatta $f'(3)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{L}{1+Me^{-kt}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(1+Me^{-kt}\right) \cdot \frac{-L}{(1+Me^{-kt})^2}$$

$$= -Mke^{-kt} \cdot \frac{-L}{(1+Me^{-kt})^2}$$

$$= \frac{MLke^{-kt}}{(1+Me^{-kt})^2}$$

$$e^{-kt} = \left(\frac{9}{49}\right)^3$$

$$f'(3) = MLk \cdot \left(\frac{\left(\frac{9}{49}\right)^3}{\left(1+49\cdot\left(\frac{9}{49}\right)^3\right)^2}\right)$$

$$= 49 \cdot 10\,000 \cdot \ln\left(\frac{49}{9}\right) \cdot \left(\frac{\left(\frac{9}{49}\right)^3}{\left(1+49\cdot\left(\frac{9}{49}\right)^3\right)^2}\right)$$

$f'(3) \approx 3030$ (siimasruttaa/kk)

2. Funktio on jatkuva pisteessä jos ja vain jos sillä on raja-arvo $L$ joka on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Koska $$\frac{x}{\ln(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{e^x - 1}{x}$$

Origon ympäristössä, myös

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Lasketaan siis raja-arvot

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1 \quad \Big| \text{ L'Hospital } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Siis $$1 \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Koska $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, $f(0) = 1$

3. $\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

a) $e^{-3x} \cosh(kx)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{(-3+k)x} + e^{(-3-k)x}\right)$

$\lim_{x \to \infty} e^{ax}$ lähestyy

- $\infty$ kun $a > 0$
- $1$ kun $a = 0$
- $0$ kun $a < 0$

Siis jos $-3 + k > 0$ tai $-3 - k > 0$

eli $k > 3$ tai $k < -3$

$\lim_{x \to \infty} e^{-3x} \cosh(kx) = \infty$

Muulloin molemmat
termit lähestyvät
äärellisiä raja-arvoja.

3 b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(e^{kx}-e^{-kx})}{\cancel{\frac{1}{2}}(e^{2x}+e^{-2x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{kx}-e^{-kx}}{e^{2x}(1+e^{-4x})}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(k-2)x}-e^{(-k-2)x}}{1+e^{-4x}}.$$

Nimittäjä suppenee kohti lukua 1, kun $x\to\infty$, joten siitä ei tarvitse huolehtia. Lauseke suppenee silloin, kun sekä $e^{(k-2)x}$ että $e^{(-k-2)x}$ suppenevat eli kun

$$k-2\leq 0 \quad \text{ja} \quad -k-2\leq 0 \quad \text{eli} \quad k\leq 2 \quad \text{ja} \quad k\geq -2.$$

Toisaalta jos $k>2$, niin $k-2>0$ ja $-k-2<-4$, joten $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)} = +\infty$.

Vastaavasti jos $k<-2$, niin $k-2<-4$ ja $-k-2>0$, joten $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)} = -\infty$.

Vastaus: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(2x)}$ suppenee täsmälleen silloin, kun $-2\leq k\leq 2$.

4. - ääriarvokohta: Sellainen piste, jonka ympäristössä olevissa pisteissä funktion arvo on aina joko suurempi (minimi) tai pienempi (maksimi) kuin pisteessä

- voi esiintyä vain 1. derivaatan nollakohdissa

- käännepiste: piste jossa funktion kaarevuussuunta muuttuu

- voi esiintyä vain 2. derivaatan nollakohdissa

Lisäksi kyseisen derivaatan nollakohdassa derivaatan etumerkin on muututtava.

Tutkitaan funktiota $x \mapsto xe^{-x}$ (nimetään f:ksi)

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Nollakohdat: $0 = (1-x)e^{-x}$

$$\Rightarrow 1 - x = 0$$

$$x = 1$$

$e^{-x}$ ei vaikuta etumerkkiin. $1-x$ on selvästi positiivinen kun $x < 1$ ja negatiivinen kun $x >$ $\Rightarrow x = 1$ on ääriarvokohta

| $f'$ | $+$ | $-$ |
|---|---|---|
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

1

Tutkitaan käännepisteitä 2. derivaatan avulla.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left((1-x)e^{-x}\right)$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (x-1)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 = (x-2)e^{-x} \quad \Big| \quad e^{-x} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \text{eli} \quad x = 2$$

Kuten äsken, nähdään että 2. derivaatan etumerkki vaihtuu nollakohdassa. Siis:

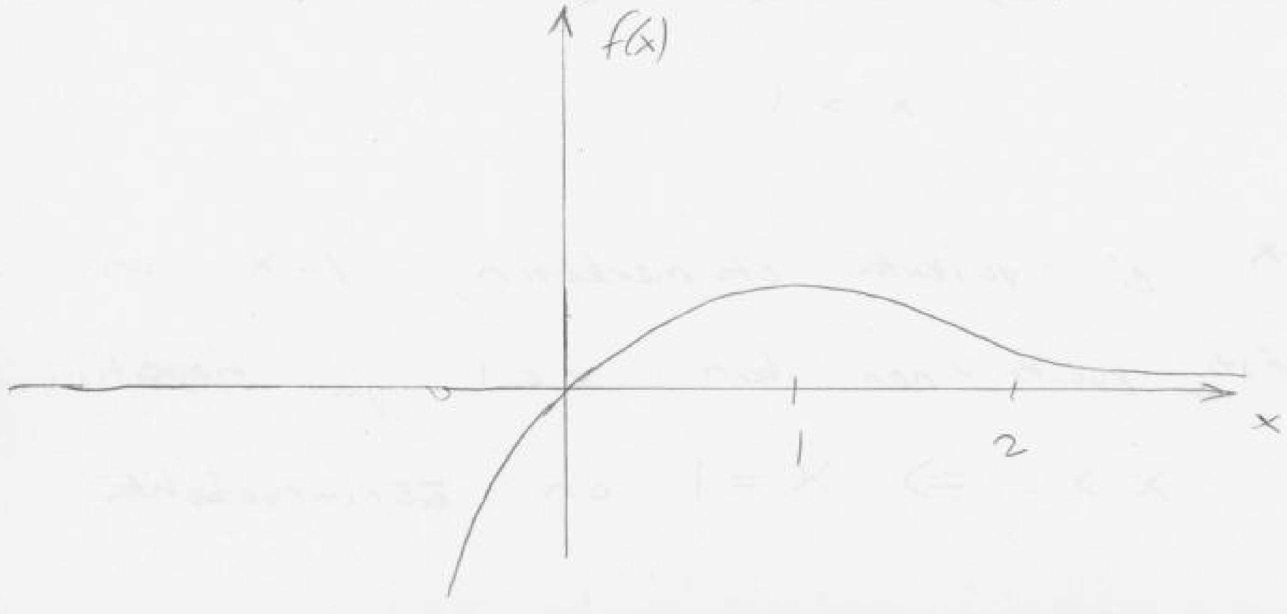
| $f''$ | $-$ | $+$ |
|---|---|---|
| $f$ | $\frown$ | $\smile$ |

2

Lisäksi huomataan että $f(0) = 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Piirretään näitä hyödyntäen kuvaaja



5. $f(x) = \frac{T}{\omega} \cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$

a) Tiedetään että $f$ on symmetrinen (cosh on)

eli $f(a) = f(-a) \Rightarrow f\left(-\frac{T}{\omega}\right) = f\left(\frac{T}{\omega}\right)$

Lisäksi $f'(x) = \sinh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$ jolla on

$(f' > 0,\ x > 0)$ nollakohta

$x = 0$, jolloin se on minimi. Kun $x > 0$

$f$ on siis aidosti kasvava, joten suurin arvo

on välin päätepisteessä $x = \frac{T}{\omega}$

$$h(T,\omega) = f\left(\frac{T}{\omega}\right) - f(0)$$

$$= \frac{T}{\omega}\left(\cosh(1) - \cosh(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{\omega}\left(e^{1} - e^{-1} - e^{0} - e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{\omega}\left(e - \frac{1}{e} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{\omega}\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$ | kikkailua

$$= 2\frac{T}{\omega}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

b) Koska $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$ ja $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$, niin

$$f'(x) = \cancel{\frac{\omega}{T}} \cdot \cancel{\frac{T}{\omega}} \sinh\left(\frac{\omega x}{T}\right) = \sinh\left(\frac{\omega x}{T}\right), \qquad (1)$$

$$f''(x) = \frac{\omega}{T}\cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right). \qquad (2)$$

Lähdetään liikkeelle sievентämällä oikeanpuolista lauseketta:

$$\frac{\omega}{T}\sqrt{1+f'(x)^2} \overset{(1)}{=} \frac{\omega}{T}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{\omega x}{T}\right)}$$ | $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\ x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{\omega}{T}\sqrt{\cosh^2\left(\frac{\omega x}{T}\right)}$$ | cosh positiivinen, parillinen ja ylöspäin aukeava funktio $\Rightarrow \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x,\ x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{\omega}{T}\cosh\left(\frac{\omega x}{T}\right)$$

$$\overset{(2)}{=} f''(x),$$

kuten haluttiin osoittaa.

# Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

## Malliratkaisut, Loppuviikko 4, teht 1-3

1. Kahvin lämpötilan muutosnopeus:

$$r(t) = -7e^{-0,1t} \quad [C°/min]$$

Kahvin lämpötila ajanhetkellä $t$:

$$l(t) = \int r(t)dt$$

$$= \int -7e^{-0,1t}dt = -7\left(-\frac{1}{0,1}e^{-0,1t} + c\right)$$

$$= 70e^{-0,1t} + C$$

Määritetään vakio $C$:
Kun $t=0$, kahvin lämpötila on $90°$, ts. $l(0) = 90°$

$$90 = 70e^{-0,1\cdot 0} + C \Leftrightarrow 90 = 70 + C$$

$$\Leftrightarrow C = 90 - 70 = \underline{\underline{20}}$$

Kahvin lämpötila, kun $t = 10$ [min]:

$$l(10) = 70e^{-0,1\cdot 10} + 20 = 45,7516\ldots \approx 46°C$$

V: $\underline{\underline{46°C}}$

2. Muutama laskusääntö:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx} e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

a) Keskimääräinen väestö vuosien 2010 ja 2050 välillä

$\Rightarrow$ 2050 - 2010 = 40 vuoden ajalta siis

$$\Rightarrow \frac{1}{40}\int_0^{40} 112 \cdot 1{,}011^t \, dt = \frac{112}{40}\int_0^{40} e^{t \ln 1{,}011} \, dt$$

$$= \frac{112}{40} \cdot \Big/_0^{40} \frac{1}{\ln 1{,}011} e^{t(\ln 1{,}011)}$$

$$= \frac{112}{40 \cdot \ln 1{,}011} \Big/_0^{40} 1{,}011^t$$

$$= \frac{112}{40 \cdot \ln 1{,}011}\left(1{,}011^{40} - 1\right)$$

$$= 140{,}508\ldots \approx 140{,}5 \text{ milj}$$

b) Vuosien 2010 ja 2050 väestöjen keskiarvo:

$$\frac{P(0) + P(40)}{2} = \frac{112 + 112 \cdot 1{,}011^{40}}{2} \approx 142{,}74\ldots = 142{,}7 \text{ milj.}$$

c) Tulokset poikkeavat toisistaan siksi että väestön kasvua kuvaava funktio $P(t)$ ei ole lineaarinen.

Alkutilan ja lopputilan keskiarvo ei ota huomioon vuosien aikana tapahtunutta epälineaarista kehitystä.

3. Osittaisintegrointi

$$\int u'(t)v(t)\,dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)\,dt$$

a) $\int x\sin(x)\,dx$

Valitaan
$u'(x) = \sin(x) \Leftarrow u(x) = -\cos(x)$
$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$

$= \underline{\underline{-x\cos(x) + \sin(x) + C}}, C \in \mathbb{R}$

b) $\int x^2 \sin(x)\,dx$

Valitaan
$u'(x) = \sin(x) \Leftarrow u(x) = -\cos(x)$
$v(x) = x^2 \Rightarrow v'(x) = 2x$

$= -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,dx$

Valitaan
$u'(x) = \cos(x) \Leftarrow u(x) = \sin(x)$
$v(x) = 2x \Rightarrow v'(x) = 2$

$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx$

$= \underline{\underline{-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C}}, C \in \mathbb{R}$

c) $\int \ln^2 x\,dx$

Valitaan
$u'(x) = 1 \Leftarrow u(x) = x$
$v(x) = \ln^2 x \Rightarrow v'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

$= x\ln^2 x - \int 2x\ln x \frac{1}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$

$\Bigg\{$ Otetaanpa $\int \ln x\,dx$ lähempään tarkasteluun

$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, mutta $\frac{d}{dx}x\ln x = \ln x + 1$. Täten

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C, C \in \mathbb{R}$ $\Bigg\}$

$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx = \underline{\underline{x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C}}, C \in \mathbb{R}$

3d. $\int \frac{x}{e^x}\,dx = \int x e^{-x}\,dx$ | Valitaan $u'(x) = e^{-x} \Leftarrow u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$= -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C$

$$= \underline{\underline{\frac{-x-1}{e^x} + C}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Malliratkaisut, Loppuviikko 4, teht 4-5

4 a. $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0} \int_c^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$

$= \lim_{c \to 0} \Big/_c^{\pi} -2e^{-\sqrt{x}}$

$= \lim_{c \to 0} \left(-2e^{-\sqrt{\pi}} + 2e^{-\sqrt{c}}\right)$

$= -2e^{-\sqrt{\pi}} + 2e^{-\sqrt{0}}$

$= -2e^{-\sqrt{\pi}} + 2$

b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{\ln x}{x} dx$

$= \lim_{c \to 0} \Big/_c^1 \frac{(\ln x)^2}{2}$

$= \lim_{c \to 0} \left(\frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{(\ln c)^2}{2}\right)$

$= 0 - \frac{(\ln 0)^2}{2}$

$= -\infty \Rightarrow$ ei suppene

4\. c.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \lim_{c \to \pi/2} \int_{\pi/4}^{c} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$= \lim_{c \to \pi/2} \Big/_{\pi/4}^{c} -2\sqrt{\cos x}$$

$$= \lim_{c \to \pi/2} \left(-2\sqrt{\cos c} + 2\sqrt{\cos(\tfrac{\pi}{2})}\right)$$

$$= 0 + 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \underline{\underline{2^{3/4}}}$$

d.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \lim_{c \to \infty} \Big/_{1}^{c} \sinh^{-1}(x)$$

$$= \lim_{c \to \infty} \left(\sinh^{-1}(c) - \sinh^{-1}(1)\right)$$

$$= \infty \Rightarrow \underline{\underline{\text{ei suppene}}}$$

Huomio: $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava bijektio, joka kahden eksponenttitermin summana pätee $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$. Tällöin myös tämän käänteisfunktiolle $\lim_{x\to\infty} \sinh^{-1}(x) = \infty$.

Vaihtoehtoisesti rajan voi nähdä funktion $\sinh^{-1}$ lausekkeesta:

$$y = \sinh(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \overset{\cdot 2e^x}{\Leftrightarrow} 2ye^x = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2y \underset{(-)}{+} \sqrt{4y^2+4}}{2}$$

| $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten miinusmerkki ei kelpaa

$$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \xrightarrow{y \to \infty} \infty.$$

5. Integraalin muuttujanvaihto

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

kääntyvälle ja derivoituvalle funktiolle $g\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} 3\sin^2(3x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin^2(y)\,dy$

Nyt $g(x) = 3x$, $g'(x) = 3$, $f(x) = \sin^2(g(x))$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/3} 3\sin^2(3x)\,dx = \int_0^{\pi/3} \sin^2(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$= \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{3})} \sin^2(y)\,dy \quad \left|\ \begin{aligned} g(\tfrac{\pi}{3}) &= 3\cdot\tfrac{\pi}{3} = \pi \\ g(0) &= 3\cdot 0 = 0 \end{aligned}\right.$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{\pi} \sin^2(y)\,dy}}$$

b) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^3\,dx = \int_0^1 y^3 e^y\,dy$

Nyt $g(y) = e^y$, $g'(y) = e^y$, $g(0) = 1$, $g(1) = e$

$$\Rightarrow \int_0^1 y^3 e^y\,dy = \int_0^1 \ln^3 g(y)\,g'(y)\,dy \quad \left|\ \begin{aligned} &= \int_0^1 \ln^3 e^y \cdot e^y\,dy \\ &= \int_0^1 (\ln e^y)^3\, e^y\,dy \\ &= \int_0^1 y^3 e^y\,dy \end{aligned}\right\}$$

mistä $\ln^3$ ?? tässä avattuna

$$= \int_{g(0)}^{g(1)} \ln^3 x\,dx$$

$$= \underline{\underline{\int_1^e \ln^3 x\,dx}}$$

5 c) $\int_1^2 2\ln(x^2+1)\,dx = \int_1^4 \frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y}}\,dy$

Nyt $g(y)=\sqrt{y}$, $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, $g(1)=1$, $g(4)=2$

$$\int_1^4 \frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y}}\,dy = 2\int_1^4 \ln(g(y)^2+1)\,g'(y)\,dy$$

$$= 2\int_{g(1)}^{g(4)} \ln(x^2+1)\,dx$$

$$= \underline{\underline{\int_1^2 2\ln(x^2+1)\,dx}}$$

$$= 2\int_1^4 \ln((\sqrt{y})^2+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \int_1^4 \frac{2\ln(y+1)}{2\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \int_1^4 \frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y}}\,dy$$

d) $\int_0^\pi x\cos(\pi-x)\,dx = \int_0^\pi (\pi-y)\cos y\,dy$

Nyt $g(x)=\pi-x$, $g'(x)=-1$, $g(0)=\pi$, $g(\pi)=0$

$$\int_0^\pi x\cos(\pi-x)\,dx = \int_0^\pi (\pi-(\overbrace{\pi-x}^{g(x)}))\cos(\overbrace{\pi-x}^{g(x)})\cdot(-g'(x))\,dx$$

$$= -\int_{g(0)}^{g(\pi)} (\pi-y)\cos y\,dy$$

$$= -\int_\pi^0 (\pi-y)\cos y\,dy$$

$$= \underline{\underline{\int_0^\pi (\pi-y)\cos y\,dy}}$$