MS-A0102 Differential and integral calculus 1
Ratkaisut 5, tehtävät 1-7

1. Samalla `linspace(a,b,101)` Matlab antaa

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \approx 1.7369, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \,\mathrm{d}x \approx 0.7138, \quad \int_0^3 x^2 \,\mathrm{d}x \approx 9.1354,$$

kun taas tarkat arvot ovat

$$\mathrm{e} - 1 \approx 1.7183, \quad 1/\sqrt{2} \approx 0.7071, \quad \text{and } 9.$$

3.

$$\mathrm{e}^t \approx 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6},$$
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} \right)\Big|_0^1 = \frac{26}{35} \approx 0.7429.$$

※ Itse asiassa, funktion e^{-x^2} integraalifunktiota ei voida ilmaista alkeisfunktioiden avulla. Voit yrittää laskea integraalin $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ suosikkiohjelmistollasi. Esimerkiksi Mathematican perusintegraattori antaa $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx 0.7468$.

4. Vertaa Harjoitusten 3, tehtävään 6(a).

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120},$$
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \right)\Big|_0^1 = \frac{1703}{1800} \approx 0.94611.$$

※ Tämä on toinen viattoman näköinen funktio, jonka integraalifunktiota ei voida ilmaista alkeisfunktioiden avulla. Mathematica antaa $\int_0^1 x^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x \approx 0.94608$.

5.

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$
$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+2)\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\Big|_2^3$$
$$\frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln 5 + \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5} \approx 0.091.$$

6. Huomaa aluksi, että

$$\frac{x^3}{x(x+2)} = \frac{x^2}{x+2}.$$

Jakokulmassa laskeminen (ei näytetä tässä) antaa

$$\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q(x) = x - 2 \\ r(x) = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 0, \\ D = 4. \end{cases}$$

Ollaan valmiita integroimaan:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_3^2 x - 2 + \frac{4}{x+2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4\ln(x+2)\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2} + \ln\frac{5}{4} \approx 1.39.$$