

**MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, I / 2023**

**Laskuharjoitus 4A** alkuviikolla 39

Aihepiiri: Alkeisfunktiot, käänteisfunktio

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 3.10. klo 23:59 mennessä.

**Taulutehtävät 25.–26.9.**

1. Laske funktion  $f(x) = e^{\sin(x^2)}$  derivaatta.
2. Laske ensin  $\sinh(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$  ja tämän jälkeen funktion  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  derivaatta. Oletetaan, että  $F$  on kaikkialla derivoituva funktio ja  $F'$  on sen derivaatta. Määritä funktio, jonka derivaatta on

$$(a) \frac{F'(x)}{\sqrt{1 + F(x)^2}}, \quad (b) \frac{F'(2x + 3)}{\sqrt{1 + F(2x + 3)^2}}.$$

3. Laske luvun  $\sqrt{83}$  approksimaatio käyttäen hyväksi tietoa, että  $\sqrt{81} = 9$  ja linearisoimalla funktiota  $\sqrt{x}$ . Onko tarkka arvo suurempi vai pienempi kuin laskemasi arvo?

**Palautettavat tehtävät 3.10.**

4. Olkoot  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ja  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivoituvia funktioita. Olkoon  $f$  parillinen eli  $f(-x) = f(x)$  kun  $x \in \mathbf{R}$  ja olkoon  $g$  pariton eli  $g(-x) = -g(x)$  kun  $x \in \mathbf{R}$ . Mitä voidaan sanoa funktioiden  $f'$  ja  $g'$  parillisuudesta tai parittomuudesta?
5. Olkoon  $f(x) = x^2 \ln x$ , kun  $1 \leq x < \infty$ . Funktio  $f$  on aidosti kasvava (perustele tämä), joten  $f$ :llä on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion derivaatan arvo  $(f^{-1})'(y_0)$  pisteessä  $y_0 = e^2$ .
6. a) Derivoi funktiot  $\ln(\ln x)$ ,  $xe^x - e^x$  ja  $x \ln x - x$ .  
b) Sievennä lauseke  $4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln \sqrt[3]{x}$ , kun  $x > 0$ .

**Laskuharjoitus 4L** loppuviikolla 39  
Aihepiiri: Derivaatan ketjusääntö, integraali

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana. Tehtäviä ei siis tarvitse laskea etukäteen eikä vastauksia palauteta.

1. Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a) } \int_0^4 (12x^2 - 6\sqrt{x} + 1) dx, \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx, \quad \text{c) } \int_{-2}^2 e^{-x} dx.$$

2. Kaksi ajasta riippuvaa vastusta  $R_1$  ja  $R_2$  on kytketty rinnan, eli niiden yhdistetty resistanssi on  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ . Eräällä hetkellä, kun  $R_1 = 300\Omega$  ja  $R_2 = 600\Omega$ , resistanssi  $R_1$  kasvaa nopeudella  $50\frac{\Omega}{\text{vuosi}}$ .

- Kuinka nopeasti ja mihin suuntaan  $R_2$ :n arvoa pitää "trimmata", jotta yhdistetty resistanssi  $R$  pysyisi vakiona?
- Millä nopeudella  $R_2$ :n pitäisi vanhetessaan muuttua, jotta  $R$  kasvaisi itsekseen nopeudella  $20\frac{\Omega}{\text{vuosi}}$ ?

3. Osoita Bolzanon merkinvaihtolauseen (eli jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden) avulla, että yhtälöllä

$$3x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$$

on vähintään kolme erisuurta ratkaisua.

4. Oletetaan, että  $F$  on kaikkialla derivoituva funktio ja  $F'$  on sen derivaatta. Määritä funktio, jonka derivaatta on

$$\text{(a) } F(x)^3 F'(x), \quad \text{(b) } F(3x)^2 F'(3x), \quad \text{(c) } F(5x+2)^{-\frac{3}{2}} F'(5x+2).$$