Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — Malinen/Hirvi

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, I / 2023

Laskuharjoitus 5A alkuviikolla 40
Aihepiiri: Integraali

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 10.10. klo 23:59 mennessä. Huomaa viimeisen sivun lisämateriaali!

Taulutehtävät 2.–3.10.

1. Laske integraalit
$$\int_0^1 \frac{x}{1+2x^2}\,dx,\ \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+3x^4}}\,dx \ \text{ ja } \ \int_{-1}^1 x^2 e^{-x^3}\,dx.$$
Vihje: Huomaa yhdistetty funktio ja sisäfunktion derivaatta.

2. Suppeneeko epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$? Vihje: Mitä on $D\ln(\cos x)$?

3. a) Johda R-säteisen pallon h-korkuisen kalotin pinta-alan lauseke $A = 2\pi Rh$. Vihje: Kyseessä on funktioon $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ liittyvä pyörähdyspinta välillä $R - h \le x \le R$. Integroitava lauseke sievenee hyvin yksinkertaiseen muotoon.
b) Päättele a-kohdan tuloksen perusteella koko pallon pinta-alan lauseke.

Palautettavat tehtävät 10.10.

4. Laske integraali
$$\int_{-1}^5 |3x-6|\,dx.$$

5. Mistä näkee, että seuraava lasku on virheellinen:
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \Big/_{-1}^{1} -\frac{1}{x} = -2?$$
Mitä oikean tuloksen pitäisi olla?

6. Funktion $f\colon [0,\infty[\, \to \mathbf{R}$ *Laplace-muunnos* on uusi funktio $\mathcal{L}f$, jonka arvo kohdassa $s > 0$ lasketaan kaavalla
$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$
Osoita, että $(\mathcal{L}f)(s) = \dfrac{1}{s+3}$, kun $f(x) = e^{-3x}$.

Laskuharjoitus 5L loppuviikolla 40
Aihepiiri: Integroimismenetelmät

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana. Tehtäviä ei siis tarvitse laskea etukäteen eikä vastauksia palauteta.

1. Laske osittaisintegroinnin avulla $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$.

2. Laske integraalit
$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad \text{ja} \quad \int_0^3 \sqrt{9-u^2}\,du$$
sijoittamalla $x = t^2,\ u = 3\sin v$.

3. Laske integraali $\displaystyle\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx$.

4. a) Johda osittaisintegroinnin avulla palautuskaava
$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$
(Merkintöjen lyhentämiseksi voit laskea ilman raja-arvoa eli ∞ integroinnin ja sijoituksen ylärajana)
b) Laske a-kohtaa käyttämällä integraali
$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x}\,dx.$$

Integraalin geometrisia sovelluksia

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\,dx$ on funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$, niin $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri, niin saadun pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

- Jos kappaletta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri, se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

  Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx.$$

  Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx$.

- Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää y-akselin ympäri, niin vastaava tilavuus on

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$