

## Information

Kontaktuppgifter:

• Björn Ivarsson  
Y326 (bjorn.ivarsson@aalto.fi) (Mottagningstid  
Fredag, kl. 11-12 ?)

Assistenter: Niklas Miller, Kristian Jakobsson,  
Emil Flykt, Felix Furu

Betyg på kursen kan fås på 2 sätt

① Övningar samt kurstentamen

Övningstillfälle 1 (måndagar)

3 hemtal + 3 inlämningsuppgifter  
(inlämnas fredagen innan) (inlämnas onsdagen  
efter)

Övningstillfälle 2 (torsdagar / fredagar)

- Demonstrationsövningar (4 övningar)

Varannan vecka så får ni också

STACK-övningar att läsa. Dessa (inlämnas)  
kan diskuteras på denna övning fredag

På detta sätt samlar ni poäng under kursens  
gång. 40% av vitsordet; 60% från  
kurstentamen.

② Tentamen

# Talföljder

En talföljd är en "följd av tal"

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Ex  $(1, 2, 3, 4, 5, \dots) = (n+1)_{n=0}^{\infty}$

Man kan också tänka på detta med hjälp av funktioner

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(n) = a_n$$

(De naturliga talen =  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ )

Ex:  $(1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad f(n) = n+1 = a_n$

$$(1, 2, 4, 8, \dots) \quad f(n) = a_n = 2^n$$

Man kan också beskriva följder rekursivt (eller induktivt).

Ex:  $a_{n+1} = a_n + 1 \quad ; \quad a_0 = 0$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 2, 3, \dots)$$

Ex  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ;  $a_0 = 0$  &  $a_1 = 1$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Det behöver inte alltid finnas en formel för  $a_n$ .

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (3, 1, 4, 1, 5, \dots)$$

decimalutveckling för  $\pi$ .

Induktionsbevis

Induktionsbevis

Bassteg: Visa att påståendet  $P_n$  gäller då  $n=0$ .  
( $P_0$  är sann.)

Induktionssteg: Visa att om  $P_n$  är sann så är  $P_{n+1}$  sann.

$$(P_n \text{ är sann} \Rightarrow P_{n+1} \text{ är sann})$$

Om man kan visa bassteg och induktionssteg så är  $P_n$  sann för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

Exempel på  
Induktionsbevis

Ex: Vi har en rekursivt definierad talföljd  
 $a_n = 2a_{n-1} + 1$  ;  $a_0 = 0$

Vi ser  $a_1 = 1$  ,  $a_2 = 2+1=3$  ,  $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$   
och  $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Vi gissar att  $a_n = 2^n - 1$  (\*)

Vi genomför ett induktionsbevis av (\*)

Bassteg:  $n=0$        $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = a_0$   
OK!

Induktionssteg Antag att (\*) gäller då  
 $n=p$ . (Induktionsantagande)

Alltså vi antar att  $a_p = 2^p - 1$  och vill  
visa att det följer att  $a_{p+1} = 2^{p+1} - 1$ .

$$a_{p+1} = 2a_p + 1 \stackrel{IA}{=} 2(2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1$$

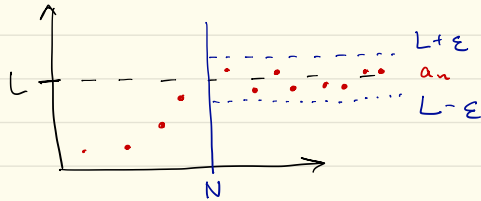
OK!

Vi har visat att formeln  $a_n = 2^n - 1$  gäller  
för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

Gränsvärde  
för talföljd

Vi kommer behöva undersöka vad som händer med  $a_n$  då  $n$  blir stort. Vi behöver definiera  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Definition: Vi säger att  $L \in \mathbb{R}$  är gränsvärdet för  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  och skriver  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  om för varje  $\varepsilon > 0$  det finns  $N$  så att

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ om } n \geq N$$


Figur

Ex  $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Välj  $\varepsilon > 0$ . Låt  $N$  vara det minsta heltal som är större än  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Vi ser att

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{ om } n \geq N$$

Alltså  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

## Räkne regler

Sats: Antag att  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  och  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ .

Då gäller

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$  &  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = LM$

(iii) Om  $M \neq 0$  då  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$

(iv) Om  $a_n \leq b_n$  för alla  $n$  då gäller  $L \leq M$

Instängningssatsen: Om  $a_n \leq b_n \leq c_n$  för alla  $n$  och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \text{ så är}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Ex Beräkna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Gränsvärden behöver inte alltid existera

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  divergerar mot  $\infty$

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  divergent

Ex •  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(3+\frac{1}{n})} = \frac{1}{3}$

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0$

"Hastighetstabell"

När n blir stort så gäller

$\log n \ll n^\alpha \ll n^\beta \ll a^n \ll n!$  ( $0 < \alpha < \beta$ )  
( $a > 1$ )

$\ll$  = "mycket mindre än"

Ex  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n^7}{n^3+2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7(1+\frac{4}{n^7})}{2^n(1+\frac{n^3}{2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7}{2^n} = 0$

Ex  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n} =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} = 1$