$$\frac{x^3}{x^2-1} = ?$$

$$\begin{array}{rl} & x \\ \hline x^3 & \big|\, x^2-1 \\ -(x^3-x) & \\ \hline x & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

polynom

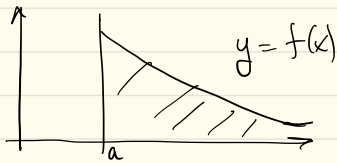
partialbråksuppdelning

Generaliserade integraler

Generaliserade integraler

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ är en generaliserad integral

Låt oss börja genom att tolka detta som en area.



Det första man lägger märke till är att detta inte alltid blir ett tal.

$y = f(x) \equiv 1$ då måste

$\int_a^\infty 1\,dx = \infty$ Man säger att $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerar (mot ∞)

Definition

Definition: $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Om gränsvärdet existerar så är $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent och integralens värde är lika med gränsvärdet.

Ex $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^N =$$
$$= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$$

Ex $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^N =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \ln N - \ln 1 = \infty$$

Så integralen är divergent mot ∞

Ex $(p \neq 1)$ $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^N =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p-1}\left(1 - N^{1-p}\right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{om } p>1 \\ \infty & \text{om } p<1 \end{cases}$$

(p-integraler)

Sats $(a>0)$ Integralen $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerar då $p>1$ och divergerar då $p \leq 1$.

Det finns andra typer av generaliserade integraler.

Ex $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln x\right]_\varepsilon^1 =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln\varepsilon = +\infty.$

Integralen är divergent mot ∞.

Ex (Varning) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ "=" } \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (-\frac{1}{-1}) = -2$

Detta är fel! Integralen är generaliserad!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \underset{\text{Symmetri}}{=} 2\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 =$$

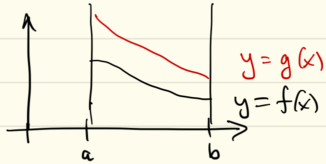
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \infty.$$

Integralen är divergent!

Ibland är det viktigt att veta att en integral konvergerar. Man kan sedan försöka approximera den.

Sats Om $0 \le f(x) \le g(x)$ på $[a,b]$ då gäller

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$



Ex Konvergerar eller divergerar

$$\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx \quad ?$$

Vi ser $e^{-1} \le e^{\sin x} \le e^1$.

$$\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx$$

$$e^{-1}\int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx \le \int_1^N \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx \le e\int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$e^{-1}\cdot \underline{1} \le \int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx \le e\cdot \underline{1}$$

Alltså $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^2}\,dx$ konvergerar och har värde mellan e^{-1} och e

Ex Beräkna $\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|}{x^2+1}\,dx$ om den konvergerar.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|}{x^2+1}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx \quad \text{om den existerar}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

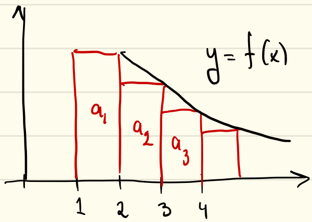
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+N^2) = \infty$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x^2+1}\,dx$ är divergent.

Jämförelsekriterier för positiva serier

Man kan ibland ersätta konvergensundersökningar för serien med konvergensundersökningar för integraler.



Om man kan hitta $f(x)$ så att denna figur är korrekt så gäller

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \le a_1 + \int_2^\infty f(x)\,dx$$

Dessutom gäller $\int_2^\infty f(x)\,dx \le \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Inses om man skjuter grafen $f(x)$ "ett steg åt vänster."

Alltså $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergent om $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ är

och $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergent om $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ är.

Sats: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergent då $p > 1$

divergent då $p \leq 1$

Bevis: Jämför med $f(x) = \frac{1}{x^p}$

Differentialekvationer

Differentialekvationer

En differentialekvation är ett samband mellan f och dess derivator f', f'' o.s.v.

Ex Fritt fall

$y(t)$ = höjden över marken vid tid t.

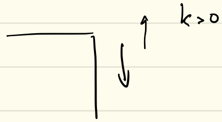
$$y''(t) = -g$$

$$y'(t) = -gt + C$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + Ct + D$$

Om vi räknar med luftmotstånd också

$$y''(t) = -g - k y'(t)$$



Hur gör man för att lösa en sån här differentialekv.?

Detta är vad resten av kursen handlar om. Vi skall lära oss några metoder för att lösa differentialekvationer.

Första ordningens ordinära differentialekvationer

Integrerande faktor

Integrerande faktor

$$y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x) \qquad (*)$$

Låt $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$.
Multiplicera $(*)$ med den integrerande faktorn (I.F)
$e^{F(x)}$.
Vi får

$$\underbrace{e^{F(x)}\,y'(x) + f(x)\,e^{F(x)}\,y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}y(x)\right)} = g(x)\,e^{F(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{F(x)} y(x) = \int g(x)\, e^{F(x)}\, dx$$

$$y(x) = e^{-F(x)} \int g(x)\, e^{F(x)}\, dx$$

Ex Lös $y' + \frac{1}{x} y = x^2 \quad ; \quad x > 0$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C \quad (\text{Välj } C = 0)$$

I.F. $\quad e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

Multiplicera med I.F.

$$x y' + y = x^3$$

$$\frac{d}{dx}(xy) = x^3$$

$$xy = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

Ex $\quad x^2 y' + y = 1 \quad ; x > 0$

$$y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad (\text{Väl}; \ C = 0)$$

$$I.F = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x}} y\right) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$e^{-\frac{1}{x}} y = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{x} \\ dt = \frac{1}{x^2} dx \end{array}\right] =$$

$$= \int e^t dt = e^t + C = e^{-\frac{1}{x}} + C$$

$$y(x) = 1 + Ce^{1/x}$$

Separabla differentialekvationer

Separabla differentialekvationer

Detta är kedjeregeln "baklänges"

Låt $F'(x) = f(x)$. Kedjeregeln säger

$$\frac{d}{dx} F(y(x)) = y'(x) F'(y(x)) = y'(x) f(y(x))$$