Ex $\quad x^2y' + y = 1 \quad ; x > 0$

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C \qquad (\text{Välj } C = 0)$$

$$\text{I.F} = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x}}y\right) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$e^{-\frac{1}{x}}y = \int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{x} \\ dt = \frac{1}{x^2}dx \end{array}\right] =$$

$$= \int e^t\,dt = e^t + C = e^{-\frac{1}{x}} + C$$

$$y(x) = 1 + Ce^{1/x}$$

Separabla differentialekvationer

Separabla differentialekvationer

Detta är kedjeregeln "baklänges"

Låt $F'(x) = f(x)$. Kedjeregeln säger

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = y'(x)F'(y(x)) = y'(x)f(y(x))$$

Därför om vi har en ODE på formen

$$y'(x)\, f(y(x)) = g(x)$$

så gäller $\quad \frac{d}{dx} F(y(x)) = g(x)$

$$F(y(x)) = \int g(x)\,dx$$

Om F är inverterbar så gäller

$$y(x) = F^{-1}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

Enklare att komma ihåg metoden så här

$$f(y)\,y' = g(x)$$

$$f(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$F(y) = G(x) + C$$

Lös ut y om det går

$$y = F^{-1}(G(x) + C)$$

Ex

$$yy' = e^x$$

$$y\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int y\,dy = \int e^x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = e^x + C$$

$$y^2 = 2e^x + D$$

$$y = \pm\sqrt{2e^x + D}$$

Ex

$$(\cos y)\,y' = -x$$

$$\int \cos y\,dy = \int -x\,dx$$

$$-\sin y = -\frac{x^2}{2} - C$$

$$\sin y = \frac{x^2}{2} + C \qquad \left(\text{On } \frac{x^2}{2} + C \in \cancel{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$[-1, 1]$$

$$y = \arcsin\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Andra ordningens linjära differentialekv. med konstanta koefficienter

Ex $y''(t) = -g - ky'(t)$

Sätt $f(t) = y'(t)$

$$f'(t) = -g - kf(t) \iff f'(t) + kf(t) = -g$$

$$I.F = e^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt} f(t)\right) = -ge^{kt}$$

$$e^{kt} f(t) = -\frac{g}{k} e^{kt} + C$$

$$y'(t) = f(t) = -\frac{g}{k} + Ce^{-kt}$$

$$y(t) = -\frac{gt}{k} - \frac{C}{k} e^{-kt} + D$$

Andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

* **Homogena ekvationer**

$$y'' + ay' + by = 0$$

Ansats $y = Ae^{rx}$; $y' = rAe^{rx}$; $y'' = r^2 Ae^{rx}$

Detta ger

$$y'' + ay' + by = A\left(r^2 + ar + b\right)e^{rx}$$

Om r är en rot till $r^2 + ar + b = 0$ så är $y = Ae^{rx}$ en lösning till

$$y'' + ay' + by = 0$$

$r^2 + ar + b = 0$ kallas den karakteristiska ekvationen för $y'' + ay' + by = 0$

En andragradsekvation har två rötter (eller en dubbelrot)

Låt oss börja med det enklaste fallet

Fall 1 $r_1 \neq r_2$ och $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (Två distinka rötter)

$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ ger samtliga lösningar

(Det behövs teori för att visa att detta är samtliga lösningar)

Ex Lös $y'' - 3y' + 2y = 0$

K.E. $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = 2$$

$y = Ae^{x} + Be^{2x}$ ger alla lösningar

Fall 2 Två distinkta komplexa rötter

$r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$

Om $a, b \in \mathbb{R}$ så gäller $r_1 = \overline{r_2}$.

Alltså $r_1 = \alpha + i\beta$ & $r_2 = \alpha - i\beta$

$$\Longrightarrow \quad y = Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} =$$
$$= \ldots = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$$
$$C, D \in \mathbb{R}$$

Ex $y'' + \omega^2 y = 0$

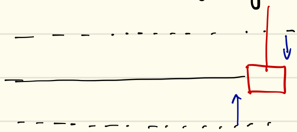
K.E $r^2 + \omega^2 = 0$

$r = \pm i\omega$

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

Detta är diff. ekv för harmonisk svängning

$$y'' = -\omega^2 y$$



Med dämpning

$$y'' = -ky' - \omega^2 y$$

$$\Longrightarrow \quad y'' + ky' + \omega^2 y = 0$$

K.E $r^2 + kr + \omega^2 = 0$

$$r = -k/2 \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2}$$

Om $\frac{k}{2} < \omega$ då

$$y = e^{-\frac{k}{2}x}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2}\,x\right)\right)$$

Fall 3 $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ (dubbelrot)

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_1x} = (A+B)e^{r_1x}$$ ger inte alla lösningar

K.E är i detta fall

$$(r-r_1)^2 = r^2 - 2r_1r + r_1^2 = 0$$

Så dubbelrötter dyker upp då

$$y'' - 2r_1y' + r_1^2y = 0$$

$$(a = -2r_1 \ , \ b = r_1^2)$$

Observera att

$$y = xe^{r_1x}$$
$$y' = r_1xe^{r_1x} + e^{r_1x}$$
$$y'' = r_1^2xe^{r_1x} + 2r_1e^{r_1x}$$

Vi ser $y'' - 2r_1y' + r_1^2y = r_1^2xe^{r_1x} + \boxed{2r_1e^{r_1x}} -$

$$- 2r_1(r_1xe^{r_1x} + \boxed{e^{r_1x}}) + r_1^2xe^{r_1x} =$$

$$= 0$$

Alltså $y = Ae^{r_1 x} + Bxe^{r_1 x}$ ger alla lösningar.

Ex: Lös $y'' - 4y' + 4y = 0$

K.E $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2 \pm 0$$

$$\Longrightarrow y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$$

Ex: $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

K.E. $r^2 + 2r + 2 = 0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$\Longrightarrow y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$y'(x) = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y(0) = e^{-0}(A\cos 0 + B\sin 0) = A = 2$$

$$y'(0) = -A + B = -3 \Longrightarrow B = -1$$

$$y(x) = e^{-x}(2\cos x - \sin x)$$