* Inhomogena ekvationer

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

Vi vet hur man löser det homogena problemet

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Antag att vi har två lösningar y_1 och y_2 till det inhomogena problemet. Alltså

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = f(x) = y_2'' + ay_2' + by_2$$

Om vi bildar $y = y_1 - y_2$ så ser vi

$$y'' + ay' + by = y_1'' - y_2'' + a(y_1' - y_2') + b(y_1 - y_2) = f(x) - f(x) = 0$$

Alltså $y = y_1 - y_2$ är en lösning till den homogena ekvationen. Därför får vi samtliga lösningar till $y'' + ay' + by = f(x)$ genom att lösa det homogena problemet $y'' + ay' + by = 0$ fullständigt och sedan hitta en partikulärlösning till $y'' + ay' + by = f(x)$ och slutligen addera lösningarna.

Ex Lös $y'' + y = 1$ fullständigt

Lösning: Lös först det homogena problemet

$$y'' + y = 0$$

K.E

$$r^2 + 1 = 0 \quad ; \quad r = \pm i$$

$$y_H = A\cos x + B\sin x$$

Vi gissar nu en partikulärlösning. Genom att stirra ser vi att $y_p = 1$ funkar.

$$y_p' = 0, \quad y_p'' = 0$$

$$\Longrightarrow \quad y_p'' + y_p = 0 + 1 = 1 \quad \text{OK!}$$

Alltså $y = y_H + y_p = A\cos x + B\sin x + 1$

ger oss samtliga lösningar till ekvationen.

*

Vi bör alltså lära oss att gissa rätt partikulärlösning.

Ex $y'' - y' - 2y = f(x)$

Vi väljer $f(x)$ senare för att illustrera våra gissningar men först det homogena problemet.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

K.E $\quad r^2 - r - 2 = 0 \;;\; r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$$r_1 = -1 \quad r_2 = 2$$

$$y_H = Ae^{2x} + Be^{-x}$$

a) $\quad f(x) = x$

Vad bör vi gissa?

$$y_p = Cx + D$$
$$y_p' = C$$
$$y_p'' = 0$$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 0 - C - 2(Cx + D) = \\ = -2Cx - C - 2D$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -2C = 1 \\ -C - 2D = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} C = -1/2 \\ D = -C/2 = 1/4 \end{array}$$

Alltså $\quad y_p = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$$\Longrightarrow y = y_H + y_p = Ae^{2x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

b) $f(x) = x^2+1$

$$y_p = Cx^2+Dx+E$$
$$y_p' = 2Cx+D$$
$$y_p'' = 2C$$

$$y_p''-y_p'-2y_p = 2C-(2Cx+D)-2(Cx^2+Dx+E) =$$
$$= -2Cx^2+(-2D-2C)x+(2C-D-2E) = x^2+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2C=1 \\ -2C-2D=0 \\ 2C-D-2E=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-1/2 \\ D=1/2 \\ 2E=2C-2D-1=-5/2 \\ E=-5/4 \end{cases}$$

$$y = y_p+y_H = Ae^{2x}+Be^{-x}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$$

c) $f(x) = \sin 2x$

$$y_p = C\cos 2x + D\sin 2x$$
$$y_p' = -2C\sin 2x+2D\cos 2x$$
$$y_p'' = -4C\cos 2x-4D\sin 2x$$
$$y_p''-y_p'-2y_p = -4C\cos 2x-4D\sin 2x+2C\sin 2x$$
$$-2D\cos 2x-2C\cos 2x-2D\sin 2x =$$
$$= (-6C-2D)\cos 2x+(2C-6D)\sin 2x$$

$$\begin{cases} 2C-6D=1 \\ -6C-2D=0 \end{cases} \Rightarrow D=-3C \Rightarrow 2C+18C=1 \Rightarrow \begin{cases} C=1/20 \\ D=-3/20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = y_H+y_p = Ae^{2x}+Be^{-x}+\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x$$

d) $f(x) = e^{x}$

$$y_p = Ce^{x}$$
$$y_p' = Ce^{x}$$
$$y_p'' = Ce^{x}$$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = Ce^{x} - Ce^{x} - 2Ce^{x} = -2Ce^{x}$$
$$\Longrightarrow -2C = 1 \Longrightarrow C = -1/2$$

$$y = y_H + y_p = Ae^{2x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}e^{x}$$

e) $f(x) = e^{-x}$

$$y_p = Ce^{-x} \quad ; \quad y_p' = -Ce^{-x} \; ; \; y_p'' = Ce^{-x}$$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = (C - (-C) - 2C)\,e^{-x} = 0$$

Nytt försök

$$y_p = Cxe^{-x}$$
$$y_p' = Ce^{-x} - Cxe^{-x}$$
$$y_p'' = -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x}$$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = -2Ce^{-x} + Cxe^{-x} - (Ce^{-x} - Cxe^{-x}) - 2Cxe^{-x} =$$
$$= -3Ce^{-x}$$

$$\Longrightarrow -3C = 1 \Longrightarrow C = -1/3$$

Alltså

$$y = y_H + y_p = Ae^{2x} + Be^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x}$$

Ex $y'' + y = \sin x$

Lösning: Först $y'' + y = 0$ K.E. $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

$$y_H = A\cos x + B\sin x$$

$$y_p = Cx\sin x + Dx\cos x$$

$$y_p' = C\sin x + Cx\cos x + D\cos x - Dx\sin x$$

$$y_p'' = C\cos x + C\cos x - Cx\sin x - D\sin x - D\sin x - Dx\cos x$$

$$y_p'' + y_p = 2C\cos x - Cx\sin x - 2D\sin x - Dx\cos x + Cx\sin x + Dx\cos x = 2C\cos x - 2D\sin x$$

$$\Longrightarrow C = 0, \quad D = -1/2$$

$$y = y_H + y_p = A\cos x + B\sin x - \tfrac{1}{2}x\cos x$$