Jämförelsekriteriet

Detta ger ett viktigt kriterium för positiva serier.

Sats (Jämförelsekriteriet)

Om $0 \le a_k \le M b_k$ för $n \ge K$ då gäller

- Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
- Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent (mot ∞) då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent (mot ∞)

Bevis: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ är växande $(s_n \le s_{n+1})$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ är växande $(u_n \le u_{n+1})$

Dessutom gäller $s_n \le u_n \cdot M$ (†)

Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent med värde $L \left(= \lim_{n\to\infty} u_n\right)$

Så får vi $s_n \le u_n M \le \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \cdot M = LM$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ existerar $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. ok

(†) kan skrivas $\frac{1}{M} s_n \le u_n$. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent så gäller $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ och $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ vilket ger $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

Gränsvärdeskriteriet

Variant av jämförelsekriteriet (Gränsvärdeskriteriet)

Antag att $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$

- Om $L < \infty$ och $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. då är $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.
- Om $L > 0$ och $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ div. då är $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ div.

Faktum om p-serier

Faktum som vi visar senare i kursen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
- konvergerar om $p > 1$
- divergerar om $p \leq 1$

Ex $\sum \frac{1}{n}$ divergerar ; $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerar

Ex Är $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}-1)^2}$ konvergent eller divergent?

Jämför med $b_n = \frac{1}{n}$ (Kom ihåg: $\sum \frac{1}{n}$ divergent)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sqrt{n+1}-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}})^2} = \underline{1}$$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}-1)^2}$ divergent eftersom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent.

Kvotkriteriet

Studera $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Detta ger

$$a_{n+1} \le (\rho+\varepsilon)a_n$$

samt

$$a_{n+1} \ge (\rho-\varepsilon)a_n \quad \text{då} \quad n \ge \underset{\substack{\nwarrow \\ (\text{beror på } \varepsilon)}}{K}$$

Om vi fortsätter så får vi

$$a_{n+j} \le (\rho+\varepsilon)^j a_n \quad \text{och} \quad a_{n+j} \ge (\rho-\varepsilon)^j a_n .$$

Med andra ord $\sum_{j=0}^{\infty} a_{k+j} \le a_k \sum_{j=0}^{\infty} (\rho+\varepsilon)^j$

och $\sum_{j=0}^{\infty} a_{k+j} \ge a_k \sum_{j=0}^{\infty} (\rho-\varepsilon)^j$

Kvotkriteriet →

- Om $\rho<1$ då konveregrar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- Om $\rho>1$ då divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- Om $\rho=1$ vet man inte !

Potensserier

Ex Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ divergent eller konvergent?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Serien är konvergent.

Ex $p = 1$ säger inget

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent (se tidigare exempel sid ⑫)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergent (p-serie med $p=2$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Potensserier

En serie på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\underset{\text{variabel}}{x} - \underset{\text{potensseriens centrum}}{x_0})^n$

kallas för en potensserie.

Notera att en potensserie definierar en funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

för x där serien konvergerar.

Ex • $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Konvergerar då $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

För vilka x konvergerar denna serie?

$|a_n| = \frac{|x|^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

Komplikation: I allmänhet så blir termer negativa i en potensserie. Det är komplicerat att studera sådana serier. Dock är det ett faktum att $\sum a_k$ konvergerar om $\sum |a_k|$ konvergerar

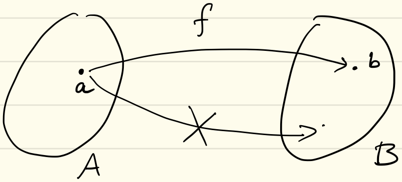
Kvotkriteriet ger att serien konvergerar för alla x.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ för alla $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$

Def: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Funktioner

$f: A \to B$ är en funktion från A till B om det för varje $a \in A$ finns ett unikt $b \in B$ så att $f(a) = b$.



$f(a) = b$

I denna kurs $f: \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{(a,b)}} \to \mathbb{R}$ nästan alltid.

Funktionssammansättning

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ex

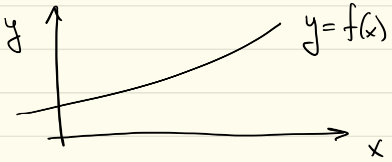
$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = 2^x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 + 1 = 2^{2x} + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 2^{(x^2+1)}$$

Kontinuerliga funktioner

Grafen för en funktion $f(x)$

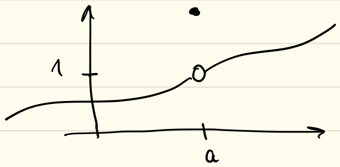


Gränsvärdet av en funktion

Definition: Vi säger att $\lim_{x \to a} f(x) = L$ om för varje $\varepsilon > 0$ det finns $\delta > 0$ så att

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ex:

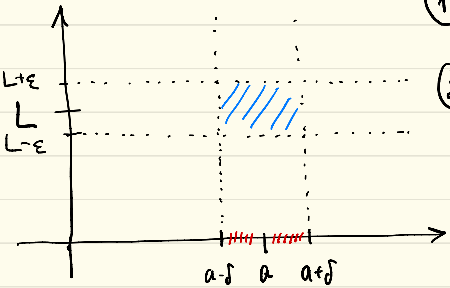


$$\lim_{x \to a} f(x) = 1$$

Ex

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2$$

Illustration av gränsvärde för funktioner



① Välj först $\varepsilon > 0$

② Hitta $\delta > 0$ så att om x är i det röda intervallet så ligger $f(x)$ i det blå området

(Dock inte nödvändigt för $x=a$!!)