**Kontinuerlig funktion**

Definition: En funktion är kontinuerlig i $x=a$ om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

**Räkneregler för gränsvärden**

Sats: Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$

Då gäller

- $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
- $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = LM$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ om $M \neq 0$
- Om $f(x)$ är kontinuerlig i $M$ då gäller

  $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(M).$$

Ex: $f(x) = \sin\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \sin\left(1+\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 1} 1+\frac{1}{x}\right) = \sin 2$$

eftersom sinus är kontinuerlig

**Ex**

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} = 2^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = 2^1 = 2$$

eftersom $f(x) = 2^x$ är kontinuerlig

**Ex** Är $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{om } x \neq 1 \\ 2 & \text{om } x = 1 \end{cases}$

en kontinuerlig funktion?

Vi behöver undersöka $\lim_{x\to 1} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = f(1)$$

Se ex på sid 19

Exempel på kontinuerliga funktioner

Vi kan använda räknereglerna på sidan 20 för att förstå att många vanliga funktioner är kontinuerliga.

- Konstanta funktioner är kontinuerliga
- $f(x) = x$ är kontinuerlig
- Polynom är kontinuerliga

- Rationella funktioner (kvoter av polynom) $p(x)/q(x)$ är kontinuerlig då $q(x) \neq 0$
- $\sin x$ och $\cos x$ är kontinuerliga
  (detta följer inte från räknereglerna)
- Funktionssammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga.

Ex: $f(x) = \sin(x^2+1)$ är kontinuerlig

- Potensfunktioner $f(x) = a^x$ är kontinuerliga
- Rotfunktioner $f(x) = x^\alpha$ är kontinuerliga där de är definierade.
  $\alpha \in \mathbb{R}$

Ex: $f(x) = \sqrt{x} \left(= x^{1/2}\right)$ är kontinuerlig då $x \geq 0$.

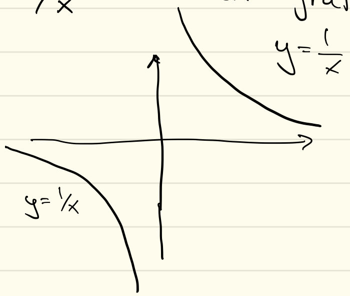
Man kan också tala om höger- och vänster-gränsvärden samt höger- och vänsterkontinuitet

Ex $f(x) = \sqrt{x}$ är högerkontinuerlig i $x=0$

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 \left(= \sqrt{0} = f(0)\right)$$

Man kan också ge mening åt $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ samt $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ osv.

Ex: $f(x) = 1/x$ har en graf enligt

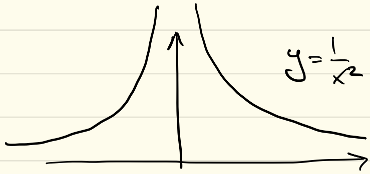



Om man tittar på grafen så "ser man"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$




$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Ex Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} x - \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+1)-x^2}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Instängningssatsen gäller också för dessa gränsvärden

Antag att $f(x) \le g(x) \le h(x)$ och

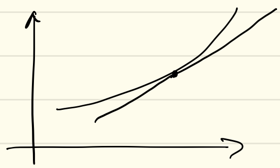
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \quad (a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$$

Då gäller $\lim_{x\to a} g(x) = L$

Derivering

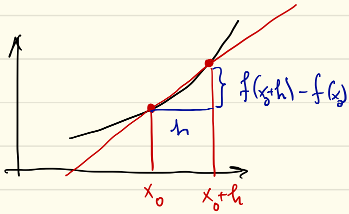
## Derivering

Ofta vill man beskriva hur en funktion förändras.



Tangentens lutning är ett bra mått.

Approximation av tangentlinjen




$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Definition av derivata

Definition: $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

är derivatan till $f$ i punkten $x_0$.

Ex $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

- Om $f(x)$ är deriverbar i $x_0$ så är den kontinuerlig i $x_0$.

**Standardderivator**

Standardderivator

- $f(x) = k \implies f'(x) = 0$
- $f(x) = x^p;\ p \neq 0, p \in \mathbb{R} \implies f'(x) = p x^{p-1}$
- $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x$

**Deriveringsregler**

Deriveringsregler

① $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
$\quad (kf)'(x) = k f'(x)$

② $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregeln)

③ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

④ $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$ (Kedjeregeln)

inre derivata

**Bevis:** ② $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Optimering

4 "Bevis":

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

⊗

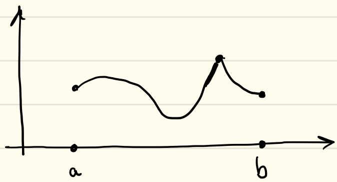
Ex: Derivera $f(x) = \cos(x^2+1)$

$$f'(x) = 2x\cdot\left(-\sin(x^2+1)\right) = -2x\sin(x^2+1)$$

Optimeringsproblem

Hur "stor eller liten" kan en funktion bli?

Strategi




Var kan max/min finnas?

1. Leta kritiska punkter ($f'(x)=0$), singulära punkter (derivatan existerar ej)

2. Beräkna värden i ändpunkter samt kritiska punkter (och singulära punkter om de finns)