Integration och areaberäkning

Vad är $\frac{d}{dx}\arctan x$?

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = f(x) \quad x = \arctan y = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Alltså $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

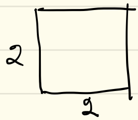
På samma sätt $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

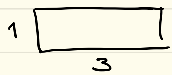
$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Integration och areaberäkning

Areaberäkning

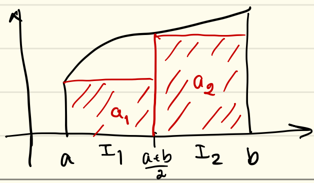
Vad är area? Ett mått på hur mycket yta en figur består av. Vi kan beräkna area av enkla figurer.





area $= 2 \cdot 2 = 4$ a.e   area $= 1 \cdot 3 = 3$ a.e

Om en figur har area som är mindre än en annan så får den plats i den större (åtminstone efter den klippts). Om vi bestämmer oss för att man kan lägga ihop areor och att den är positiv så kan man komma fram till en metod för att beräkna area av svårare områden i planet.

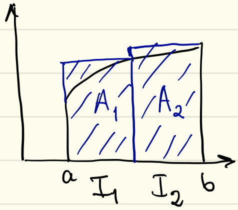


$a_1 + a_2 \leq$ Arean

$m_i = \min \{ f(x) \, ; \, x \in I_i \}$

$a_i = \frac{b-a}{2} \cdot m_i = (\Delta x) \, m_i$

Också

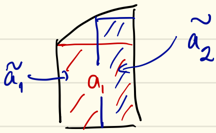


$$\text{Arean} \leq A_1 + A_2$$

$$M_i = \max\{f(x);\ x \in I_i\}$$

$$A_i = \frac{b-a}{2} M_i = (\Delta x) M_i$$

Vad händer då vi delar intervallet ytterligare?



$$a_1 + a_2 \leq \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 \leq \text{Arean}$$

Vi får

$$\sum_{i=1}^{n(=2^k)} m_i (\Delta x) \leq \text{Arean} \leq \sum_{i=1}^{n(=2^k)} M_i (\Delta x)$$

där $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Alltså

$$\sum_{i=1}^{2^k} m_i (\Delta x) \leq \sum_{i=1}^{2^{k+1}} m_i (\Delta x) \leq \text{Arean} \leq \sum_{i=1}^{2^{k+1}} M_i (\Delta x) \leq \sum_{i=1}^{2^k} M_i (\Delta x)$$

Om detta och detta närmar sig samma tal så är det arean de närmar sig.

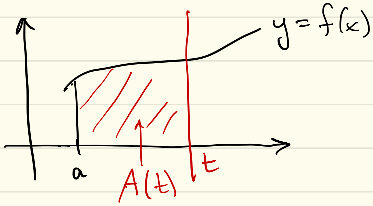
Den bestämda integralen av f från a till b.

Med andra ord

$$\text{Arean} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2^k} m_i(\Delta x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2^k} M_i(\Delta x) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = \text{Bestämda integralen av } f \text{ från } a \text{ till } b.$$

Hur gör man för att beräkna $\int_a^b f(x)\,dx$?



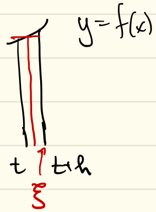
(då f är kontinuerlig)

Vi beräknar $A'(t)$.

$t \leq \xi \leq t+h$

$$A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)h}{h} = f(t)$$

Varför $A(t+h) - A(t) = f(\xi)t$? P.g.a



Med andra ord $A(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$!

Vilken primitiv funktion ?

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) + C$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C = 0 \implies C = -F(a)$$

$$\implies \int_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a)$$

Integralkalkylens fundamentalsats

Vi har bevisat

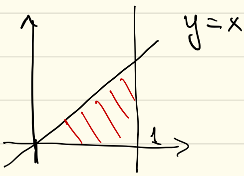
<u>Integralkalkylens fundamentalsats</u>

Om f är kontinuerlig så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ där F

är en primitiv funktion till f.

<u>Ex</u> $y = f(x) = x$



$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ex

$0 \le x \le \pi$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2$$

Obestämda integraler

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$ alla primitiva funktioner

Γ $\int_a^b f(x)\, dx =$ ett tal

$\int f(x)\, dx =$ alla primitiva funktioner $\lrcorner$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$; $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C & \text{då } x > 0 \\ \ln(-x) + D & \text{då } x < 0 \end{cases}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$

Variabelsubstitution

Integrationsmetoder

- Variabelsubstitution

Kedjeregeln säger

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F(g(x)) + C = \int \frac{d}{dx} F(g(x))\, dx = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Ex

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin(x^2) + C$$

Ex

$$\int e^{2x}\, dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2} e^t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Ex:

$$\int \sqrt{1+2x}\, dx = \begin{bmatrix} t = 1+2x \\ dt = 2\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2} \sqrt{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} (1+2x)^{3/2} + C$$

Ex

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{2} t^{-3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4t^2} + C = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + C$$

Ex

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-1}{t}\,dt = \begin{cases} -\ln t + C_1, & t>0 \\ -\ln(-t) + C_2 & t<0 \end{cases} =$$

$$= -\ln|\cos x| + C_j$$ där C_j kan vara olika konstanter (värdena kan ändra då $\cos x$ byter tecken)

Partiell integration

Partiell integration

"Produktregeln för derivering baklänges"

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)g(x)\big) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Vi får

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\big(F(x)g(x)\big)\,dx - \int F(x)g'(x)\,dx$$

$$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$