Ex

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2} t^{-3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4t^2} + C = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + C$$

Ex

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{-1}{t}\,dt = \begin{cases} -\ln t + C_1, & t>0 \\ -\ln(-t) + C_2 & t<0 \end{cases} =$$

$= -\ln|\cos x| + C_j$ där C_j kan vara olika konstanter (värdena kan ändra då $\cos x$ byter tecken)

Partiell integration

Partiell integration

"Produktregeln för derivering baklänges"

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)g(x)\right) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Vi får

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\left(F(x)g(x)\right)dx - \int F(x)g'(x)\,dx$$

$$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Ex

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

$f(x)$ $g(x)$

Ex

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Ex

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx =$$

$$= e^x \sin x - \Big(e^x \cos x - \underbrace{\int e^x (-\sin x) dx}_{\text{Tillbaka där vi började}}\Big)$$

Dock $I = \int e^x \sin x \, dx$

ger $I = e^x(\sin x - \cos x) - I$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

Ex Ett trick som ibland fungerar

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx =$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

Partialbråksuppdelning

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx \qquad p \,\&\, q \text{ polynom}$$

Vi kan integrera $\frac{1}{x-a}$ och $\frac{1}{x^2+1}$. Detta ger, tillsammans med faktorsatsen, en möjlighet att integrera samtliga rationella funktioner.

Ex $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = ?$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \overset{\text{Gissning}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Kan vi välja A & B så att likhet gäller för alla x?

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A=-B \\ A=1/2 \Longrightarrow B=-1/2 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \longleftarrow \text{"lokalt" konstant}$$

Ex:

$$\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2}\,dx = ?$$

Vi faktoriserar nämnaren.

Hitta rötter $x^2-3x+2=0$; $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} =$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

Nu gäller det att göra rätt gissning

$$\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} \overset{\text{Ansats}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -2A-B=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$$

"lokalt" konstant

Ex

$$\int \frac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)}\,dx \qquad x^2+1=0 \text{ saknar lösning}$$

$$\frac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ C=1 \\ A=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2+x+2}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\ln|x| + \arctan x + C$$

"lokalt" konstant

Ex $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+1) + Bx + C(x^2-x)}{x(x-1)^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B - C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C$$

Ansatser

- $$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$
- $$\frac{1}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b}$$
- $$\frac{1}{(x-a)(x-b)^n} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)}$$
- $$\frac{1}{(x-a)(x^2+b)^n} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+b)^n} + \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(x^2+b)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+b}$$

Ex

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)^2(x^2+1)^2} \overset{\text{Ansats}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{x-3} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+1}$$

Hur gör man om $p(x)$ har högre grad än $q(x)$?

Ex

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$ kan inte funka

Gör polynomdivision först!

$$\frac{x^3}{x^2-1} = ?$$

$$x$$
$$x^3 \quad \underline{|\, x^2-1}$$
$$\underline{-(x^3-x)}$$
$$x$$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

polynom

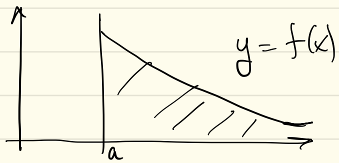
partialbråksuppdelning

Generaliserade integraler

Generaliserade integraler

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ är en generaliserad integral

Låt oss börja genom att tolka detta som en area.



Det första man lägger märke till är att detta inte alltid blir ett tal.

$y = f(x) \equiv 1$ då måste

$\int_a^\infty 1\,dx = \infty$ Man säger att $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerar (mot ∞)