Demoövningar I

① Beräkna $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n^2+1)}{n^4+2}$

<u>Lösning</u>: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n^2+1)}{n^4+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^4}(1+\frac{2}{n^4})} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n^2})}{1+\frac{2}{n^4}} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{1} = 1$$

② Bevisa $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$ för varje heltal $n \geq 1$ med hjälp av ett induktionsbevis

<u>Lösning</u>: <u>Bassteg</u> $(n=1)$

$$V.L = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$

$$H.L = \frac{1}{6}(2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 + 1) = \frac{1}{6}(2+3+1) = 1$$

OK

<u>Induktionssteg</u> Antag att formeln gäller för $n=p$. Med andra ord, vi antar att

$$\text{(I.A)} \quad \sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{1}{6}(2p^3+3p^2+p)$$

Vi vill visa att detta ger likheten

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{1}{6}\left(2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2(p^3+3p^2+3p+1)+3(p^2+2p+1)+(p+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2p^3+9p^2+13p+6\right)$$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = (p+1)^2 + \sum_{k=1}^{p} k^2 \overset{IA}{=} (p+1)^2 + \frac{1}{6}\left(2p^3+3p^2+p\right) =$$

$$= p^2+2p+1+\frac{1}{6}\left(2p^3+3p^2+p\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(6p^2+12p+6\right)+\frac{1}{6}\left(2p^3+3p^2+p\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2p^3+9p^2+13p+6\right)$$

OK

Alltså följer $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)$ genom induktion.

③ Beräkna $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)$

Lösning: $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-(4n^2+n)}{2n+\sqrt{4n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right)} = \frac{-1}{2(1+\sqrt{1})} = -\frac{1}{4}$$

④ Beräkna $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2\sqrt{n}\sin n}{2n^2+n\sqrt{n}}$

<u>Lösning</u>: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2\sqrt{n}\sin n}{2n^2+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2\sin n}{n^{3/2}}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n^{1/2}}\right)} =$

$= \frac{1}{2}$ eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n^{3/2}} = 0$ och $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Varför är $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n^{3/2}} = 0$? Jo, eftersom

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$ om $\alpha > 0$ och $-\frac{2}{n^{3/2}} \leq \frac{2\sin n}{n^{3/2}} \leq \frac{2}{n^{3/2}}$

och $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n^{3/2}} = 0$ p.g.a instängningssatsen.

Hemtal 1

① Summera alla heltal mellan 1 och 500 som inte är delbara med 3 eller 7.

Lösning: Strategi: Summera alla tal mellan 1 och 500. Dra ifrån alla som är delbara med 3. Dra ifrån alla som är delbara med 7. Vi har nu subtraherat de tal som är delbara med 3 och 7 två gånger. Addera därför alla tal mellan 1 och 500 som är delbara med $3 \cdot 7 = 21$.

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + 500 = \frac{500 \cdot 501}{2} = 125250$$

$$3 \cdot 166 = 498 \Rightarrow S_2 = \sum_{k=1}^{166} 3k = 3 \cdot \sum_{k=1}^{166} k = $$

$$= 3 \cdot \frac{166 \cdot 167}{2} = 41583$$

$$7 \cdot 71 = 497 \Rightarrow S_3 = \sum_{k=1}^{71} 7k = 7 \sum_{k=1}^{71} k =$$

$$= 7 \cdot \frac{71 \cdot 72}{2} = 17892$$

$$21 \cdot 23 = 483 \Rightarrow S_4 = \sum_{k=1}^{23} 21k = 21 \sum_{k=1}^{23} k =$$

$$= 21 \cdot \frac{23 \cdot 24}{2} = 5796$$

Summan vi söker $= S_1 - S_2 - S_3 + S_4 = 71571$

(2) Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

Lösning:

Vi bestämmer A och B så att

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots$$

(partialbråksuppdelning)

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} = \frac{A(k+2)+Bk}{k(k+2)}$$

$$= \frac{(A+B)k + 2A}{k(k+2)}$$

$(A+B)k + 2A = 1$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$

endast om $A + B = 0$ och $2A = 1$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \text{ och } B = -\frac{1}{2}$$

Därför gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

(3) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

Lösning: $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 =$

$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n =$

$= n(n+1-1) = n^2$

Alltså $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n^2 =$

$= \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$

Inlämningsuppgift 1

① Bevisa att $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = 0.$

Lösning / Bevis: Den term som är störst i $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ är $\frac{1}{n^2}$.

Därför gäller $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \le n \cdot \frac{1}{n^2}$

det finns n termer i summan

Alltså $0 \le \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \le n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ och

det följer att $0 \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0}$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = 0.$$

② Låt $(F_j)_{j=0}^{\infty}$ vara Fibonacciföljden definierad via

$$F_{j+2} = F_{j+1} + F_j \text{ då } j \ge 0,\ F_0 = 0 \text{ och } F_1 = 1.$$

Visa att $\sum_{j=0}^{n} (F_j)^2 = F_n F_{n+1}$ då $n \ge 0$.

Lösning: Bassteg På grund av definitionen av följden behöver vi kolla formeln för $n=0$ och $n=1$ i bassteget.

$\underline{n=0}$ $VL = \sum_{j=0}^{0} (F_j)^2 = (F_0)^2 = 0^2 = 0$

$HL = F_0 F_1 = 0 \cdot 1 = 0$ OK

$\underline{n=1}$ $VL = \sum_{j=0}^{1} (F_j)^2 = (F_0)^2 + (F_1)^2 = 0^2 + 1^2 = 1$

$HL = F_1 F_2 = 1 \cdot F_2 = 1 \cdot (F_1 + F_0) = 1 \cdot 1 = 1$

OK

Induktionssteg Antag att formeln gäller då $n = p \geq 1$

Alltså vi antar att $\boxed{\sum_{j=0}^{p} (F_j)^2 = F_p F_{p+1}}$ I.A och

vill visa att $\sum_{j=0}^{p+1} (F_j)^2 = F_{p+1} F_{p+2}$.

Vi har $\sum_{j=0}^{p+1} (F_j)^2 = (F_{p+1})^2 + \sum_{j=0}^{p} (F_j)^2 \overset{IA}{=} (F_{p+1})^2 + F_p \cdot F_{p+1} =$

$= F_{p+1} (F_{p+1} + F_p) = F_{p+1} \cdot F_{p+2}$

OK

Formeln följer för alla $n \geq 0$ följer genom induktion.

③ Beräkna
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\tfrac{1}{2}}.$$

<u>Lösning</u>: Detta är ett gränsvärde av typ "$(\infty-\infty)\cdot\infty = \infty-\infty$" och vi försöker därför omskriva till typen "$\frac{\infty}{\infty}$" där vi ofta kan genomföra beräkningen.

Vi får $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \frac{(n+1-n)\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}.$$

Alltså
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$