Demouppgifter 2

(1) Observera att

$$a = 1{,}111\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k .$$

Visa att a är ett rationellt tal genom att skriva $a = p/q$ där p och q är heltal.

Lösning: Vi vet att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ då $|r|<1$

Med andra ord, $\displaystyle a = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} =$

$$= \frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{10}{9} .$$

(2) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k\sqrt{k}}{3^k - k^2} \quad ?$$

Lösning: Vi använder kvotkriteriet.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+1}\sqrt{k+1}}{3^{k+1} - (k+1)^2} \cdot \frac{3^k - k^2}{2^k + (-1)^k\sqrt{k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2^{\cancel{k}+1}\left(1 + (-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}}\right)\cdot 3^{\cancel{k}}\left(1 - \frac{k^2}{3^k}\right)}{3^{\cancel{k}+1}\left(1 - \frac{(k+1)}{3^{k+1}}\right)\cdot 2^{\cancel{k}}\left(1 + (-1)^k\frac{\sqrt{k}}{2^k}\right)} = \frac{2}{3} < 1$$

Eftersom $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{3} < 1$ så ger kvotkriteriet att serien konverger.

(3) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1}} \ ?$$

Lösning: Vi jämför med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

som konvergerar.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k^3}}{\sqrt{k^3+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^{3/2}}}{\cancel{k^{3/2}}\sqrt{1+\frac{1}{k^3}}} = 1$$

Gränsvärdeskriteriet ger att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1}}$ konvergerar.

(4) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k!)}{k^4} \ ?$$

<u>Lösning:</u> $a_k = \dfrac{\ln(k!)}{k^4}$, $k \geq 1$

$$a_k = \frac{\ln k!}{k^4} = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln k}{k^4} \leq \frac{k \ln k}{k^4} \leq$$

$$\leq \frac{k \cdot k}{k^4} = \frac{1}{k^2} = b_k$$

Vi vet att $\sum b_k = \sum \frac{1}{k^2}$ konvergerar

och eftersom $0 \leq \dfrac{\ln(k!)}{k^4} \leq \dfrac{1}{k^2}$ så

ger jämförelsekriteriet att

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k!)}{k^4}$ konvergerar.

Hemtal 2

① Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k - 3^k}{5^k}$

<u>Lösning:</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k - 3^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{4}{5}} - \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

② Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ divergerar eller konvergerar.

<u>Lösning:</u> Vi ser att termerna $\frac{n+1}{n^2}$ är ungefär $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ när n är stort. Därför jämför vi med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som vi vet är divergent

$$a_n = \frac{n+1}{n^2} \quad \& \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar så får vi, p.g.a gränsvärdeskriteriet, att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ divergerar.

(3) Avgör om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

divergerar eller konvergerar.

Lösning: $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\,n} =$

$$= \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\,n} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\,n}$$

Låt oss jämföra med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$

som vi vet är konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{n}\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

Gränsvärdeskriteriet ger att

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n}$ konvergerar eftersom

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergerar.

Inlämningsuppgift 2,

① Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{n-1}{n}\right) ?$$

Lösning: $a_n = \frac{2n}{2n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{2n^2-(2n+1)(n-1)}{n(2n+1)} =$

$$= \frac{2n^2-(2n^2-n-1)}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)} \quad \left(\approx \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \text{ då } n \text{ stort}\right)$$

Vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ som är divergent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(2n+1)}\Big/\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{n}(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

Gränsvärdeskriteriet ger att

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{n-1}{n}\right)$ divergerar eftersom

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergerar.

② a) Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{2^n+(-1)^n n}$$

Notera att $a_n \geq 0$ eftersom $n^2 \geq n$ då $n \geq 1$ och $2^n > n$ då $n \geq 1$

Lösning: Vi använder kvotkriteriet

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)} \Big/ \frac{n^2+(-1)^n n}{2^n+(-1)^n n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+(-1)^n n)\left((n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)\right)}{\left(2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)\right)\left(n^2+(-1)^n n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\,\cancel{n^2}\left(1+\frac{(-1)^n n}{2^n}\right)\left((1+\frac{1}{n})^2+(-1)^{n+1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})\right)}{2\cdot\cancel{2^n}\,\cancel{n^2}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^n}\right)\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+0)(1+0)}{(1+0)(1+0)} = \frac{1}{2}$$

Eftersom $\rho < 1$ så konvergerar serien enligt kvotkriteriet

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{2^n+(-1)^n n}$ konvergerar

b) Låt a_0 vara ett heltal och a_n vara heltal som uppfyller $0 \leq a_n \leq 9$ då $n \geq 1$. Visa att

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

konvergerar.

<u>Lösning</u>: Vi studerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Eftersom alla a_n är positiva och $a_n \leq 9$ så gäller

$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10^n} = b_n$$

Vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ konvergerar eftersom

$$\frac{1}{10} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerar}$$

och därför konvergerar också

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \Rightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

konvergerar.

③ Beräkna

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$$

c) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$$

Lösning: a) Eftersom $1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0$ så gäller

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \frac{1^3 - 4 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

b) Eftersom $0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ behöver vi faktorisera nämnaren (och täljaren)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 4)}{\cancel{x}(x - 2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

$$= \frac{0^2 - 4}{0 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

c) Eftersom $2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$ så behöver vi faktorisera nämnare och täljare

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x^2 - 4)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$