Hemtal 3

1) Bestäm största och minsta värde för

$$f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$$

i intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

<u>Lösning:</u> Kritiska punkter?

$$f'(x) = 2x\sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0$?

Detta gäller om $2x-3x^3 = x(2-3x^2) = 0$

Alltså $x=0$ eller $2-3x^2=0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Singulära punkter ?

Ändpunkterna är singulära punkter eftersom $\sqrt{1-x^2} = 0$ där.

Kandidater till max-/min-punkter.

$x = \pm 1$, $x = 0$ samt $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Jämför

$$f(-1) = (-1)^2\sqrt{1-(-1)^2} = 0 = f(1)$$

$$f(0) = 0^2\sqrt{1-0^2} = 0$$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2\sqrt{1-\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Svar: Maximivärde i intervallet är $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ och antas i $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Minimi är 0 och antas i $x = \pm 1$ samt $x = 0$.

(2) Antag att $p > 1$. Visa att olikheten

$$x^p - 1 \geq p(x-1)$$

gäller då $x \geq 0$.

Lösning: Minimera $f(x) = x^p - 1 - p(x-1)$ i intervallet $x \geq 0$.

$$f'(x) = p x^{p-1} - p = p(x^{p-1} - 1)$$

$f'(x) = 0$ endast då $x^{p-1} - 1 = 0$.

Notera att x^{p-1} är växande i intervallet $x \geq 0$ då $p > 1$. Därför är $x = 1$ den enda lösning till $x^{p-1} - 1 = 0$.

Inga singulära punkter då $x > 0$.

"Ändpunkter": $x = 0$ och "$x = \infty$"

$f(0) = 0^{p-1} - 1 - p(0-1) = p - 1 > 0$ eftersom $p > 1$.

$\lim_{x \to \infty} x^p - 1 - p(x-1) = \infty$ eftersom $x << x^p$

Dessutom $f(1) = 1^p - 1 - p(1-1) = 0$

Minimum antas i $x = 1$ och är 0.

Alltså $f(x) \geq 0$ då $x \geq 0$

$\Longrightarrow$ $x^p - 1 - p(x-1) \geq 0 \Rightarrow x^p - 1 \geq p(x-1)$ då $x \geq 0$.

(3) Låt $a_1, \dots, a_n$ vara n reella tal. För vilket x har summan

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - x)^2$$

sitt minsta värde?

Lösning: Minimera $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - x)^2$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -2\sum_{k=1}^{n} (a_k - x) = -2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + 2xn$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{då} \quad 2xn = 2\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ändpunkter: $\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k - x)^2 = \lim_{x \to -\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k - x)^2 = \infty$

(eftersom $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = \infty$)

Detta ger att summan minimeras då

$$x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Inlämningsuppgift 3

① Låt $f(x) = e^x$ och använd Taylorpolynomet av ordning 5 kring $x_0 = 0$ för att approximera e. Använd Taylors sats för att beskriva hur stort felet kan vara. Här kan ni använda att $e < 3$.

<u>Lösning</u>: Vi vet att

$$T_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Eftersom $e = e^1 = f(1)$ så vet vi

att $e = f(1) \approx T_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} =$

$$= 2 + \frac{60 + 20 + 5 + 1}{120} = \frac{240 + 86}{120} = \frac{326}{120} =$$

$$= \frac{163}{60}$$

Enligt Taylors sats så gäller

$$E_5(x) = f(x) - T_5(x) \quad \text{där}$$

$$E_5(x) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(s)\, x^6 \quad \text{för något } s$$

$$0 \leq s \leq x$$

Eftersom $f^{(6)}(x) = e^x$ och $e^1 < 3$

så ser vi att $E_6(1) < \frac{1}{6!} \cdot 3 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$

$= \frac{1}{240}$. Alltså felet är högst $\frac{1}{240}$. (I

själva verket ser vi att

$$\frac{163}{60} \leq e < \frac{163}{60} + \frac{1}{240}.$$ Med tre

decimaler

$$2{,}716 \leq e < 2{,}721 \;)$$

Detta behöver inte noteras för fulla poäng

(2) Låt $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Beräkna dess Taylorpolynom kring $x_0 = 0$ av ordning 5. Använd detta Taylorpolynom för att approximera $\ln 2$.

<u>Lösning</u>: Taylorutveckla $g(x) = \ln(1+x)$ kring $x_0 = 0$.

$$T_5(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5.$$

$g(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ $g(0) = \ln 1 = 0$

$g'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $\qquad$ $g'(0) = 1$

$g''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$ $\qquad$ $g''(0) = -1 \cdot 1 = -1$

$g^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ $\qquad$ $g^{(3)}(0) = 2$

$g^{(4)}(x) = 2 \cdot (-3)(1+x)^{-4}$ $\qquad$ $g^{(4)}(0) = -6$

$g^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}$ $\qquad$ $g^{(5)}(0) = 24$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{2\cdot 3}x^3 - \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{24}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + E_5(x)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + E_5(x)$$

Vi får också

$$\ln(1-x) = (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 - \frac{1}{4}(-x)^4 + \frac{1}{5}(-x)^5 + E_5(-x)$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + E_5(x)$$

Vi approximera $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$

$$\approx \frac{1}{2}\Big(\big(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\big) - \big(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

Vi vill approximera $\ln 2$. Vilket x ger $f(x) = \frac{1}{2}\ln 2$?

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \iff 1+x = 2(1-x) \iff$$

$$\iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$$

Därför $\ln 2 = 2f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)$

$$= 2\left(\frac{5\cdot 3^4 + 5\cdot 3 + 1}{5\cdot 3^5}\right) = \frac{840}{5\cdot 3^5} =$$

$$= \frac{168}{3^5} = \frac{56}{3^4} = \frac{56}{81}$$

3 Vi vet att $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Låt $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Vi ser att $S_n < e$. Dessutom gäller olikheten

$$e < S_n + \frac{1}{n!\,n}$$

Visa denna olikhet

(Lösning: $e = S_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,n}$$

Alltså $e < S_n + \frac{1}{n!\,n}$)

Detta ger

$$S_n < e < S_n + \frac{1}{n!n}$$

Antag att $e = p/q$ där p, q är heltal och $q > 1$. Då $n = q$ får vi olikheten

$$S_q < p/q < S_q + \frac{1}{q!q}$$

Multiplicera med $q!$

$$(*) \quad q!S_q < (q-1)!p < q!S_q + \frac{1}{q}$$

Eftersom $S_q = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}$ så är

$q!S_q$ ett heltal (som vi kallar M_q)

Dessutom är $N_q = (q-1)!p$ ett heltal

Vi skriver om $(*)$ som

$$M_q < N_q < M_q + \frac{1}{q} < M_q + 1$$

Vi ser att N_q är ett heltal som ligger mellan M_q och $M_q + 1$. Detta kan inte vara sant och e kan därför inte vara ett rationellt tal.

Demonstrationsuppgifter 3

(1) Två icke-negativa reella tal har summan n. Hur stor och liten kan summan av kvadraterna x^2+y^2 vara?

Lösning: $x \geq 0$ och $y \geq 0$ samt $x+y=n \, (\geq 0)$

Vi ser $y = n-x$

Summan blir

$$x^2+y^2 = x^2+(n-x)^2 = x^2+n^2-2nx+x^2 =$$
$$= 2x^2-2nx+n^2$$

Vi maximerar samt minimerar $f(x) = 2x^2-2nx+n^2$ då $0 \leq x \leq n$

Kritiska punkter $f'(x)=0$

$$f'(x) = 4x-2n \quad ; \quad 4x-2n=0$$
$$x = n/2$$

$f(x)$ är ett polynom så singulära punkter saknas.

Beräkna funktionsvärden och jämför.

$$f(0) = 2\cdot 0^2 - 2n\cdot 0 + n^2 = n^2$$
$$f(n/2) = 2(n/2)^2 - 2n(n/2) + n^2 = n^2/2$$
$$f(n) = 2n^2 - 2n\cdot n + n^2 = n^2$$

Svar: Summan av kvadraterna har minimumvärde $n^2/2$ och maximumvärde n^2.

(2) Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

Lösning: Enligt Taylors sats så är

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5) \quad \text{och}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6)$$

Detta ger $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + O(x^6) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} - O(x^6)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)x^5 + O(x^6)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)x^2 + O(x^3) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

(3) Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Lösning: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

Vi använder Taylors sats

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Därför $\sin^2 x = (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^4) \right)^2 =$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^5)$$

Alla termer av ordning 5 eller högre samlas i feltermen

Alltså $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^5)\right)}{x^2 \cdot \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^5)\right)} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + O(x^5)}{x^4 - \frac{x^6}{3} + O(x^7)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} + O(x^2)}{1 - \frac{x^2}{3} + O(x^3)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(4) Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad n. Antag att $p(a) = 0$. Taylorutveckla $p(x)$ kring $x=a$ och visa att det finns ett polynom $q(x)$ av grad $n-1$ så att

$$p(x) = (x-a)q(x)$$

<u>Lösning</u>: Notera att ett polynom $p(x)$ av grad n uppfyller

$$p^{(k)}(x) = 0$$

för alla x om $k>n$.

Taylorutveckla $p(x)$ kring $x=a$

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Eftersom $p(a)=0$ så får vi

$$p(x) = p'(a)(x-a) + \dots + \frac{p^{n}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= (x-a)\underbrace{\left(p'(a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}\right)}_{q(x) \text{ polynom av grad } n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad p(x) = (x-a)q(x) \quad \text{Klart.}$$