Aaltouniversitetet
Björn Ivarsson

Inlämningsuppgift 3
Differential- och integralkalkyl 1, MS-A0109.
Inlämnas senast onsdag 27.9 kl 23:59 på MyCourses. *Lämna dina lösningar i en pdf-fil och se till att ditt namn och studentnummer finns i filnamnet.*

(1) Låt $f(x) = e^x$ och använd Taylorpolynom av ordning 5 kring $x_0 = 0$ för att approximera e. Använd Taylors sats för att beskriva hur stort felet kan vara. Här kan ni använda att man vet att $e < 3$. (Detta följer från uppgift 3 nedan.) (4p)

(2) Låt
$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
Beräkna dess Taylorpolynom kring $x_0 = 0$ av ordning 5. (*Tips:* $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.) Använd detta Taylorpolynom för att approximera $\ln 2$. (4p)

(3) Vi vet att
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$
Vi skall nu visa att detta tal är irrationellt. Låt
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
Eftersom alla termer i dessa summor är positiva har vi $s_n < e$ för alla n.

(a) Dessutom gäller olikheten
$$e < s_n + \frac{1}{n!n}.$$
Visa olikheten. (*Ledning: Vi har*
$$e = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$
Försök visa att
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n}$$
genom att utnyttja en geometrisk summa.) (3p)

Vi har alltså

$$s_n < e < s_n + \frac{1}{n!n}$$

för alla n. Antag $e = p/q$ för några heltal p, q (alltså vi antar att e är ett rationellt tal.) Talet e är inte ett heltal så $q > 1$. För detta q har vi olikheten

$$q!s_q < (q-1)!p < q!s_q + \frac{1}{q}.$$

Denna olikhet kan inte vara korrekt.

(b) Varför? När detta förklarats så har vi nått en motsägelse och därför måste e vara ett irrationellt tal. (1p)