Demouppgifter 4

(1) Härled $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ och

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

med hjälp av De Moivres formel

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) =$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

<u>Lösning</u>: Använd De Moivres formel med $n=2$.

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 =$$

$$= \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta =$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i\,2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

(2) Låt $f(x) = \int_{-x}^{x^2} \frac{1}{1+e^t}\, dt$.

Beräkna $f'(x)$.

Lösning: Integralkalkylens fundamentalsats säger att $f(x) = \int_{-x}^{x^2} \frac{1}{1+e^t}\, dt =$

$$= G(x^2) - G(-x) \text{ där}$$

$$G'(t) = \frac{1}{1+e^t}.$$

Därför $f'(x) = 2x\, G'(x^2) - (-1)\, G'(-x) =$

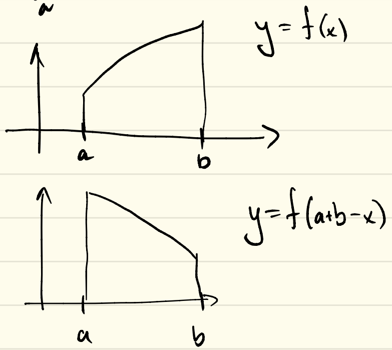
$$= 2x \frac{1}{1+e^{x^2}} + \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{2x}{1+e^{x^2}} + \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

(p.g.a kedjeregeln)

③ Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Visa likheten

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

<u>Lösning:</u> <u>Intuition</u>



<u>Bevis</u>: Integralkalkylens fundamentalsats ger att

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{där } F'(x) = f(x).$$

Definiera $G(x) = -F(a+b-x)$.

$$G'(x) = (-1) \cdot -F'(a+b-x) = F'(a+b-x) = f(a+b-x).$$

Därför

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = G(b) - G(a) =$$

$$= -F(a+b-b) + F(a+b-a) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(4) Beräkna $$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}\,dx.$$

Lösning: Använd uppgift (3) med

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}$$

Vi ser $f(2+4-x) = f(6-x) =$

$$= \frac{\sqrt{\ln(9-(6-x))}}{\sqrt{\ln(9-(6-x))}+\sqrt{\ln(3+(6-x))}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+f(6-x) = \frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}} = 1$$

Problem (3) ger $I = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(6-x)\,dx$. Därför

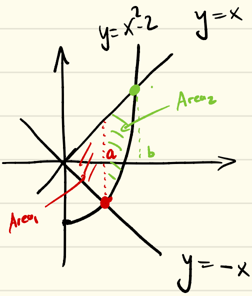
$$2I = \int_2^4 f(x)\,dx + \int_2^4 f(6-x)\,dx = \int_2^4 1\,dx = 2.$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}\,dx = 1.$$

Hemtal 4

① Kurvorna $y=x$, $y=-x$ och $y=x^2-2$ innesluter ett begränsat område i halvplanet där $x \geq 0$. Beräkna detta områdes area.

Lösning:



$$\text{Area}_1 = \int_0^a x-(-x)\,dx$$

där a är den positiva roten till $x^2-2=-x$

$$\text{Area}_2 = \int_a^b x-(x^2-2)\,dx$$

där b är den positiva roten till $x = x^2-2$

Först $x^2-2=-x \iff x^2+x-2=0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

Alltså $a = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

Dessutom $x = x^2-2 \iff x^2-x-2=0$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Alltså $b=2$

$$\text{Arean} = \text{Area}_1 + \text{Area}_2 = \int_0^1 2x \, dx + \int_1^2 x - x^2 + 2 \, dx =$$

$$= \Big[\; x^2 \; \Big]_0^1 + \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \Big]_1^2 =$$

$$= \; 1 \; + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right) =$$

$$= \; 1 + \cancel{2} - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cancel{2} = 5 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3} = \frac{9}{2} - \frac{7}{3}$$

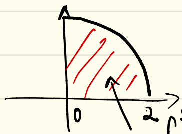
$$= \frac{27 - 14}{6} = \frac{13}{6}$$

Svar: Arean är $\frac{13}{6}$ areaenheter.

(2) Beräkna $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$ genom att uppfatta integralen som en area.

Lösning:

$y = \sqrt{4 - x^2}$



$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$

Vi ser att $y = \sqrt{4 - x^2}$ är en del av

$x^2 + y^2 = 4$ eftersom $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$

Därför $\int_0^4 \sqrt{4 - x^2} \, dx = \frac{1}{4}$ (Arean av en disk med radie 2) $=$

$$= \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi$$

(3) Beräkna $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$.

Lösning: Vi vet att $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

Kedjeregeln ger $\frac{d}{dx}\arctan 2x = 2\cdot\frac{1}{1+(2x)^2} =$

$$= \frac{2}{1+4x^2}$$

Därför gäller

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+4x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$$

Inlämningsuppgift 4

① Beräkna

a) $\int_0^\pi x - \cos 2x \, dx$

b) $\int \cos^2(x/2)\, dx$

Lösning:

a) $\int_0^\pi x - \cos 2x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi =$

$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\sin 2\pi}{2} - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{\sin 0}{2} \right) =$

$= \frac{\pi^2}{2}$

b) Eftersom $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ så får vi

$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx =$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$

② Antag att $\alpha > 0$.

a) Låt $I_n = \int_0^\alpha x^{1/n} dx$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Beräkna $\lim_{n\to\infty} I_n$.

b) Låt $J_n = \int_0^\alpha x^n dx$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Beräkna $\lim_{n\to\infty} J_n$

Lösning: a) $I_n = \int_0^{\alpha} x^{1/n}\,dx = $ α^t kont.

$$= \left[\frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} \right]_0^{\alpha} = \frac{n}{n+1}\,\alpha^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= 1 \cdot \alpha^{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}} = 1 \cdot \alpha^1 = \alpha$$

b) $J_n = \int_0^{\alpha} x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,\alpha^{n+1}$

Om $0 < \alpha \leq 1$ så gäller $0 < \alpha^{n+1} \leq 1$ och

därför $0 \leq \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \lim \frac{1}{n+1} = 0$

Om $\alpha > 1$ så gäller

$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} = \infty$ enligt hastighetstabellen

3 Beräkna $\int_a^2 \frac{1}{x^2-x}\,dx$ där $1 < a \leq 2$.

Lösning: $\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} =$

$$= \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A=1 \\ A=-1 \end{cases}$$

Alltså $\displaystyle\int_a^2 \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int_a^2 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,dx =$

$$= \Big[\ln|x-1| - \ln|x|\Big]_a^2 = \Big[\ln\Big(\frac{x-1}{x}\Big)\Big]_a^2 =$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \ln\Big(\frac{a-1}{a}\Big) = \ln\Big(\frac{a}{2(a-1)}\Big)$$