Hemtal 5

(1) Beräkna
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$$
om den konvergerar.

__Lösning:__ Notera $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} = \int t\,dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_\varepsilon^1 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2}\left((\ln 1)^2 - (\ln\varepsilon)^2\right) = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln\varepsilon)^2$$
$$= -\infty$$

__Svar:__ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$ divergerar (mot $-\infty$)

(2) Beräkna
$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$$

__Lösning:__ $$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^4+x^2-x^2}{1+x^2} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$= x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

Svar: $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$

(3) Beräkna $\int_2^3 \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx$

Lösning: Vi partialbråksuppdelar

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$\frac{4x}{x^2+2x-3} = \frac{4x}{(x-1)(x+3)} \overset{\text{Ansats}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-B)}{(x-1)(x+3)}$$

Därför $\begin{cases} A+B=4 \\ 3A-B=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=3A \\ 4A=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \end{cases}$

Alltså $\dfrac{4x}{x^2+2x-3} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x+3}$ och därför

$$\int_2^3 \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int_2^3 \frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= \Big[\ln|x-1|\Big]_2^3 + 3\Big[\ln|x+3|\Big]_2^3 =$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + 3(\ln 6 - \ln 5) =$$

*
$$= \ln 2 + 3\ln(3\cdot 2) - 3\ln 5 =$$

$$= 3\ln 3 + 4\ln 2 - 3\ln 5 =$$

$$= \ln\left(\frac{3^3\cdot 2^4}{5^3}\right) = \ln\left(\frac{432}{125}\right)$$

* Vilken som helst av dessa duger som svar.

Inlämningsuppgift 5

① Beräkna $\displaystyle\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

<u>Lösning:</u> Vi försöker med en variabelsubstitution

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left[\begin{aligned} & t = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \\ & dt = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{1}{3}(x^{1/3})^{-2}dx \\ & 3t^2\,dt = dx \end{aligned}\right] =$$

$$= \int 3t^2 \frac{e^t}{t}\,dt = \int 3t\, e^t\,dt = 3te^t - \int 3e^t\,dt =$$

$$= 3te^t - 3e^t + C = 3\left(\sqrt[3]{x}\, e^{\sqrt[3]{x}} - e^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$$

Därför $$\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left[3\left(\sqrt[3]{x}\, e^{\sqrt[3]{x}} - e^{\sqrt[3]{x}}\right)\right]_1^8 =$$

$$= 3\left(\sqrt[3]{8}\, e^{\sqrt[3]{8}} - e^{\sqrt[3]{8}}\right) - 3\left(\sqrt[3]{1}\, e^{\sqrt[3]{1}} - e^{\sqrt[3]{1}}\right)$$

$$= 3(2e^2 - e^2) - 3(e - e) = 3e^2.$$

② Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$

<u>Lösning:</u> $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$

Partialbråksuppdelning $\displaystyle\frac{x^2+4x+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Cx^3+Dx^2+Cx+D+Ax+B}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} C = 0 \\ D = 1 \\ A + C = 4 \\ B + D = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases}$$

Detta ger

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \arctan x + \int \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \arctan x + \int \frac{2}{t^2}\,dt = \arctan x - \frac{2}{x^2+1} + C$$

(3) Gammafunktionen definieras som

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$$

då $x > 0$. Visa att $\Gamma(n+1) = n!$ då n är ett positivt heltal (alltså $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

Bevis: Vi genomför ett induktionsbevis

<u>Bassteg</u>: $n=0$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t} dt = \lim_{N\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(e^{-0} - e^{-N}\right) = 1 = 0!$$

OK

Antag att formeln stämmer då $n = p-1$.

Alltså vårt induktionsantagande är

$$(I.A) \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt = (p-1)!$$

<u>Induktionssteg</u>

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^p dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t} t^p dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[-t^p e^{-t}\right]_0^N + \int_0^N p\, t^{p-1} e^{-t} dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} -N^p e^{-N} + \lim_{N\to\infty} p \int_0^N t^{p-1} e^{-t} dt$$

$$= 0 + p \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \underset{(I.A)}{=} (p-1)!\, p = p!$$

OK

Påståendet följer genom induktion

Demonstrationsuppgifter 5

① Beräkna
$$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx$$

Lösning:
$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-x}\,dx$$

$$\int x e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\Big[-xe^{-x}-e^{-x}\Big]_0^N$$

$$= \lim_{N\to\infty} -Ne^{-N} - e^{-N} - (-0e^{-0} - e^{-0}) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{N}{e^N} - \frac{1}{e^N} = 1$$

② Beräkna $\int \frac{x}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$ för $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösning:
Vi använder variabelsubstitution och sätter $u = 1+x^2$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^\alpha}\,dx = \begin{bmatrix} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^\alpha}\,du =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C & \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln|u| + C_i & \alpha = 1 \end{cases} =$$

C_i kan byta värde då u är noll

$$= \begin{cases} \frac{1}{2(1-\alpha)}(1+x^2)^{1-\alpha} + C & \text{då } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C & \text{då } \alpha = 1 \end{cases}$$

($u = 1+x^2$ aldrig lika med 0)

③ Beräkna $\int e^x \cos x \, dx$

Lösning: Låt $I = \int e^x \cos x \, dx$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Med andra ord

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$\Longrightarrow I = \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

④ Beräkna $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2+1} dx$

Lösning: Notera $\frac{x^3+2x+1}{x^2+1} = \frac{x^3+x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+1}$

$$= x + \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$= x + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

Därför gäller

Gjordes i uppgift 2

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln(1+x^2) + \arctan x + C$$