Demonstrationsuppgifter 6

① Lös differentialekvationen

$$y'(x) = e^{y(x)} \sin x$$

<u>Lösning</u>: Detta är en separabel diff.ekv.

$$\frac{dy}{dx} = e^{y} \sin x$$

$$\int e^{-y}\, dy = \int \sin x \, dx$$

$$-e^{-y} = -\cos x - C$$

$$e^{-y} = \cos x + C$$

$$-y = \ln(\cos x + C) \quad \text{då} \quad \cos x + C > 0$$

<u>Svar</u>: $y(x) = -\ln(\cos x + C)$ då $\cos x + C > 0$.

② Lös $y'(x) + y(x) = 2x + x^2 e^{-x}$

<u>Lösning</u>: Denna ekvation kan lösas med hjälp av integrerand faktor.

Integrerande faktor är $e^{\int 1\,dx} = e^{x+C}$

Välj $C=0$ och multiplicera ekvationen med e^x

$$e^x y' + e^x y = 2xe^x + x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x y(x)\right) = 2xe^x + x^2$$

Vi får $\quad e^x y(x) = \int 2xe^x\,dx + \int x^2\,dx =$

$$= \frac{x^3}{3} + \int 2x\,e^x\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2xe^x - \int 2e^x\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2xe^x - 2e^x + C$$

Vi får

$$y(x) = \frac{x^3}{3}e^{-x} + 2x - 2 + Ce^{-x} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + C\right)e^{-x} + 2x - 2$$

(3) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x^2}{y(x)^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

genom att först göra substitutionen $u(x) = y(x)/x$.

Lösning: Vi får $y(x) = x\,u(x)$ och $y'(x) = u(x) + x u'(x)$.

Vi skriver om problemet med hjälp av $u(x)$.

$$u(x) + x u'(x) = u(x) - \frac{1}{u(x)^2}$$

$$x u'(x) = -\frac{1}{u(x)^2} \quad \text{och} \quad u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$$

Denna ekvation kan lösas som en separabel ekvation.

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\int u^2\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{u^3}{3} = -\ln x + C \qquad (\text{då } x > 0)$$

$$\frac{u(1)^3}{3} = -\ln 1 + C = C \implies C = \frac{1}{3}$$

Alltså $\dfrac{u(x)^3}{3} = -\ln x + \dfrac{1}{3}$

$$u(x)^3 = 1 - 3\ln x$$

$$u(x) = \sqrt[3]{1 - 3\ln x} \implies$$

$$\implies y(x) = x\,u(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\ln x} \qquad (x > 0)$$

④ Lös differentialekvationen

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0$$

där $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$.

Lösning: Ekvationens karakteristiska ekvation

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$r = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{2x}\left(C\cos x + D\sin x\right)$$

Vi bestämmer C och D med hjälp av $y(0)=0$ och $y'(0)=2$.

$$y(0) = e^{2\cdot 0}\left(C\cos 0 + D\sin 0\right) = C = 0$$

$$y'(x) = 2e^{2x}\cdot D\sin x + e^{2x}\cdot D\cos x$$

$$y'(0) = 2D\sin 0 + D\cos 0 = D = 2$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = 2e^{2x}\sin x \quad \text{löser}$$

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Inlämningsuppgift 6

(1) Beräkna samtliga lösningar till differential-ekvationen

$$y'(x) = y(x)\left(1-y(x)\right).$$

<u>Lösning:</u> Detta är en separabel ekvation.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{y(1-y)}\,dy}_{*} = \int dx = x+C$$

Vi beräknar $*$ med hjälp av partialbråksuppdelning

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A-Ay+By}{y(1-y)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B-A=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$x+C = \int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{1-y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{y-1}\,dy$$

$$= \ln|y| - \ln|y-1|$$

C beror på
om $y<0$; $y>1$ eller $0<y<1$

Alltså $\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = x + C$ där C är konstant

då $y<0$, $0<y<1$ och $y>1$.

$$\left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{x+C} = Ae^x \quad \text{där } A = e^C > 0$$

$$\frac{y}{y-1} = Ae^x \quad \text{där } A \neq 0$$

$$y = Ae^x(y-1)$$

$$y(1-Ae^x) = -Ae^x$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{Ae^x}{Ae^x - 1} \quad \text{där } A \neq 0$$

Vi behöver också kolla $y \equiv 0$ och $y \equiv 1$

(då våra räkningar ovan inte funkar)

Man kollar enkelt att $y \equiv 0$ och $y \equiv 1$ ger lösningar.

② Lös följande differentialekv. fullständigt.

ⓐ $y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = 0$

ⓑ $\begin{cases} xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{x} & \text{då } x>0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Lösning: ⓐ $y'' - 6y' + 10y = 0$

har karakteristisk ekvation

$$r^2 - 6r + 10 = 0$$

$$r = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i$$

$$\Longrightarrow y(x) = e^{3x}(C\cos x + D\sin x)$$

ⓑ $\begin{cases} xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{x} & \text{då } x>0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Vi söker först den allmänna lösningen

$x y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{x}$. Vi löser med hjälp av integrerande faktor.

$$(*) \quad y'(x) + \frac{2}{x} y(x) = \frac{1}{x^2}$$

Integrerande faktor är $e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$

Multiplicera $(*)$ med x^2.

$$x^2 y'(x) + 2x\, y(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 y(x)\right) = 1$$

$$x^2 y(x) = \int 1\, dx = x + C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$y(1) = 2$ ger $\quad y(1) = \frac{1}{1} + \frac{C}{1^2} = C + 1 = 2$

$$\Rightarrow \quad C = 1$$

Alltså $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ löser differentialekv.

③ Lös följande differentialekv. fullständigt.

ⓐ $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x}$

ⓑ $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$

Lösning: ⓐ $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x}$

Låt oss först lösa det homogena problemet

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$$

Dess karakteristiska ekvation är

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

och $r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

Därför $y_H = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Vi söker nu en partikulär lösning y_P

till $y_p'' + 2y_p' + 5y_p = e^{-x}$

Vi gissar $y_p = \alpha e^{-x}$

$$y_p' = -\alpha e^{-x} \qquad y_p'' = \alpha e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \quad y_p'' + 2y_p' + 5y_p = \alpha e^{-x} - 2\alpha e^{-x} + 5\alpha e^{-x} =$$

$$= 4\alpha e^{-x} = e^{-x} \quad \text{då } 4\alpha = 1$$

Alltså $y_p = \frac{1}{4} e^{-x}$ är en partikulär lösning och lösningar till

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \quad \text{är på}$$

formen $y = y_p + y_H = \frac{1}{4} e^{-x} + e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

(2) Återigen börjar vi med det homogena problemet

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

K.E $\quad r^2 - 4r + 4 = 0$

$$r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2 \pm \sqrt{0}$$

dubbelrot

Därför är $y_H = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

Vi gissar en partikulär lösning y_p till

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = e^{2x}$$

Vi försöker med $y_p = \alpha x^2 e^{2x}$
(både e^{2x} och xe^{2x} ger lösningar till det homogena problemet)

$$y_p' = 2x\alpha e^{2x} + 2\alpha x^2 e^{2x}$$

$$y_p'' = 2\alpha e^{2x} + 4\alpha x e^{2x} + 4\alpha x e^{2x} + 4\alpha x^2 e^{2x}$$
$$= 2\alpha e^{2x} + 8\alpha x e^{2x} + 4\alpha x^2 e^{2x}$$

Insättning ger

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 2\alpha e^{2x} + 8\alpha x e^{2x} + 4\alpha x^2 e^{2x}$$
$$-4\left(2\alpha x e^{2x} + 2\alpha x^2 e^{2x}\right) + 4\alpha x^2 e^{2x} =$$

$$= 2\alpha e^{2x} = e^{2x} \qquad \text{om} \quad 2\alpha = 1$$

Alltså $y = y_p + y_H = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + Ae^{2x} + Bxe^{2x}$