Differentiaaliyhtälöt © Pekka Alestalo 2016

Tässä monisteessa käydään läpi tavallisiin differentiaaliyhtälöihin liittyviä peruskäsitteitä ja ratkaisuperiaatteita. Luennolla lasketaan esimerkkitehtäviä ja oppikirjoista niitä löytyy lisää. Tähdellä merkityt kohdat ovat lähinnä oheislukemista syksyn 2016 kursseilla.

1 Johdanto

Monet luonnontieteissä ja tekniikassa käytetyt mallit johtavat viime kädessä matemaattiseen ongelmaan, jossa tuntemattoman funktion ja sen derivaattoja sisältävästä yhtälöstä pitäisi ratkaista kyseessä oleva funktio. Tällaisia malleja syntyy tilanteissa, joissa esiintyy jatkuvalla tavalla esimerkiksi ajasta tai paikasta riippuvia suureita. Näitä ovat mm. radioaktiivisen aineen määrä, liuosten konsentraatiot (reaktioissa tai virtauksissa), virtapiireissä kulkevat virrat, mekaniikan liikeyhtälöissä esiintyvät koordinaatit tai kuormitetun palkin taipuma. Vaikka monissa näissä ilmiöissä (kuten radioaktiivisen aineen ydinten lukumäärä) muutokset eivät ole tarkasti ottaen jatkuvia, voidaan niitä usein sopivien approksimaatioiden kautta mallintaa jatkuvina ja esittää differentiaaliyhtälöiden avulla.

1.1 Vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö $y' = ay$

Ennen differentiaaliyhtälöiden yleistä käsittelyä on hyvä tutkia konkreettisesti yksinkertaisinta ja tärkeintä differentiaaliyhtälöä $y' = ay$, missä $a \in \mathbf{R}$ on vakio. Koska eksponenttifunktioon $y(x) = e^x$ päädyttiin juuri vaatimuksesta $y' = y$, ei ole vaikea keksiä yhtälön $y' = ay$ erästä ratkaisua $y(x) = e^{ax}$ tai yleisemmin $y(x) = Ce^{ax}$, kun C on vakio.

Kun yksi ratkaisu on keksitty, on sen osoittaminen ainoaksi mahdollisuudeksi suoraviivaista:

$$\begin{aligned} y'(x) - ay(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0 \quad \mid \; \cdot \, e^{-ax} > 0 \;\; \text{aina} \\ &\Leftrightarrow \quad y'(x)e^{-ax} - ae^{-ax}y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(y(x)e^{-ax}) = 0 \Leftrightarrow y(x)e^{-ax} = C = \text{vakio} \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{ax}. \end{aligned}$$

Lauseke e^{-ax} on differentiaaliyhtälön $y' = ay$ integroiva tekijä; sen avulla yhtälö voidaan integroida.

Esimerkki 1.1 Määritä differentiaaliyhtälölle $y' = -3y$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa ehdon $y(0) = 2$.

Ratkaisu. Tässä $a = -3$, joten yleinen ratkaisu on muotoa $y(x) = Ce^{-3x}$. Sijoittamalla tähän $x = 0$ saadaan yhtälö $2 = y(0) = Ce^0 = C$, joten kysytty ratkaisu on $y(x) = 2e^{-3x}$.

Esimerkki 1.2 Määritä differentiaaliyhtälölle $y' = ky$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(t_0) = y_0$. Tässä $k, t_0, y_0 \in \mathbf{R}$ ovat vakioita.

RATKAISU. Yleinen ratkaisu on muotoa $y(t) = Ce^{kt}$, missä $C \in \mathbf{R}$. Sijoittamalla $t = t_0$ saadaan ehto $y_0 = y(t_0) = Ce^{kt_0}$, josta ratkeaa $C = y_0 e^{-kt_0}$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis $y(t) = y_0 e^{-kt_0} e^{kt} = y_0 e^{k(t-t_0)}$.

Esimerkki 1.3 Osoita, että funktiolla $y(t) = e^{-kt}$ on seuraava ominaisuus, kun $k > 0$ on vakio: on olemassa sellainen $T > 0$, että

$$y(t+T) = \frac{1}{2} y(t)$$

kaikilla t.

RATKAISU. Sovelletaan ehtoa annetun funktion lausekkeeseen:

$$e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2} e^{-kt} \iff e^{-kt} e^{-kT} = \frac{1}{2} e^{-kt} \iff e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

sillä $e^{-kt} > 0$ aina. Logaritmin avulla saadaan ensin $-kT = \ln(1/2) = -\ln 2$, josta ratkeaa $T = (\ln 2)/k$. Tällä valinnalla ehto on siis voimassa kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Radioaktiiviseen hajoamiseen liittyvissä sovelluksissa kerroin k on *hajoamisvakio* ja T *puoliintumisaika*.

Esimerkki 1.4 Epämääräiseltä taholta ostettu kultasormus sattuukin olemaan radioaktiivista isotooppia ^{194}Au, jonka puoliintumisaika on 39,5 tuntia. Kuinka kauan sormuksen kultapitoisuus pysyy yli yhden prosentin? (Huom: Au $\to$ Pt)

RATKAISU. Radioaktiivisuuden mallintamisen taustalla on ajatus siitä, että kukin ydin hajoaa muista ytimistä riippumatta samalla todennäköisyydellä. Olkoon $y = y(t)$ ydinten lukumäärä hetkellä t. Tällöin lyhyellä aikavälillä Δt hajoavien ydinten lukumäärä $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ on suoraan verrannollinen lukumäärään $y(t)$ ja aikavälin pituuteen, ts. $\Delta y \approx -ky(t)\Delta t$ jollakin vakiolla $k > 0$. Approksimaation tarkkuus paranee aikavälin lyhentyessä, joten muodon $\Delta y/\Delta t \approx -ky(t)$ raja-arvona saadaan differentiaaliyhtälö $y' = -ky$.

Aikaisempien esimerkkien perusteella $y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)}$, missä $k = (\ln 2)/T$. Jos $t_0 = 0$ on sormuksen valmistushetki, niin tehtävässä etsitään ajanhetkeä t_1, jolle pätee $y(t_1) = 0{,}01 y_0$. Sijoitetaan ratkaisun y lausekkeeseen $t = t_1$, jolloin saadaan yhtälö

$$y_0 e^{-kt_1} = 0{,}01 y_0.$$

Tuntematon arvo y_0 supistuu pois, joten $-kt_1 = \ln 0{,}01 = -2 \ln 10$. Ratkaisuksi saadaan siis

$$t_1 = \frac{2 \ln 10}{k} = \frac{2 \ln 10}{\ln 2} T \approx 6{,}64\, T \approx 262 \text{ h} \approx 11 \text{ vrk}.$$

Esimerkki 1.5 Itä-Siperian meressä sijaitsevalta Wrangelinsaarelta löydettiin mammutin fossiili, jossa radiohiiltä oli jäljellä 64 % alkuperäisestä määrästä. Milloin mammutti kuoli? Radiohiilen ^{14}C puoliintumisaika on 5 600 vuotta ja jäljellä olevan radiohiilen prosenttiosuus $p = p(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $p' = -kp$, missä $k > 0$ on vakio.

VASTAUS. Noin 3 600 vuotta sitten.

1.2 Differentiaaliyhtälö $y' = a(x)y$

Tilanne on hieman hankalampi, jos yhtälössä esiintyvä kerroin a ei ole vakio, vaan muotoa $a(x)$. Käymme seuraavassa läpi vastaavan yhtälön

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad \text{eli} \quad y'(x) - a(x)y(x) = 0$$

ratkaisemisen, kun a on jollakin välillä $I \subset \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että ratkaisulle on voimassa $y(x) \neq 0$ kaikilla x ja jaetaan yhtälö puolittain y:llä:

$$y'(x) - a(x)y(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = a(x).$$

Koska $(\ln|y(x)|)' = y'(x)/y(x)$, niin integroimalla saadaan

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int a(x)\,dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| = A(x) + C_1,$$

missä $A'(x) = a(x)$. Näin ollen

$$|y(x)| = e^{A(x)+C_1} = e^{C_1}e^A(x), \quad \text{joten} \quad y(x) = \pm e^{C_1}e^A(x) \equiv C_2e^A(x),$$

missä $C_2 = \pm e_1^C \neq 0$. Huomataan, että myös arvo $C_2 = 0$ antaa yhtälön ratkaisun $y(x) \equiv 0$, joten saamme yleisen ratkaisun

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad \text{missä} \quad A'(x) = a(x) \quad \text{ja} \quad C \in \mathbf{R}.$$

Herää kuitenkin kysymys: antaako tämä kaava kaikki mahdolliset ratkaisut, kun alussa jouduttiin tekemään oletus $y(x) \neq 0$? Aivan kuten vakiokertoimisessa tapauksessa aikaisemmin, hyvän ratkaisuehdokkaan avulla ongelma voidaan selvittää samalla periaatteella:

$$\begin{aligned}
y'(x) - a(x)y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (y'(x) - a(x)y(x))e^{-A(x)} = 0 \quad \big| \cdot e^{-A(x)} > 0 \;\; \text{aina} \\
&\Leftrightarrow \quad y'(x)e^{-A(x)} - a(x)e^{-A(x)}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(y(x)e^{-A(x)}) = 0 \Leftrightarrow y(x)e^{-A(x)} = C = \text{vakio} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{A(x)}.
\end{aligned}$$

Olemme siis selvittäneet täydellisesti erään tärkeän differentiaaliyhtälötyypin.

Lause 1.6 *Jos $I \subset \mathbf{R}$ avoin väli ja $a\colon I \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin differentiaaliyhtälön $y' = a(x)y$ kaikkien ratkaisujen määrittelyväli on I ja ne saadaan kaavasta*

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad \textit{missä} \quad A'(x) = a(x) \quad \textit{ja} \quad C \in \mathbf{R}.$$

Jos erityisesti a on vakio, niin differentiaaliyhtälön $y' = ay$ kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = Ce^{ax}, \;\; x \in \mathbf{R},$$

jossa $C \in \mathbf{R}$ on vakio.[1]

[1] Mielestäni vakiokertoimisen yhtälön $y' = ay$ yleistä ratkaisua ei tarvitse tehtävissä enää johtaa, vaan sen saa kirjoittaa suoraan; onhan kyseessä paljon yksinkertaisempi ja helpommin arvattava tulos kuin esimerkiksi 2. asteen yhtälön ratkaisukaava.

Esimerkki 1.7 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = y/x$ alueessa $x > 0$.

RATKAISU. Kyseessä on yllä käsitelty yhtälötyyppi, kun $a(x) = 1/x$. Ratkaistaan se integroivan tekijän avulla:

$$A(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln x\,(+C),$$

joten integroiva tekijä on $e^{-\ln x} = 1/x$. Yhtälö kerrotaan siis puolittain lausekkeella $1/x$, jolloin se tulee muotoon

$$(1/x)y'(x) - (1/x^2)y(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(y(x)/x) = 0.$$

Tästä seuraa, että $y(x)/x = C =$ vakio, joten ratkaisu on $y(x) = Cx$, $C \in \mathbf{R}$. Se on helppo tarkistaa sijoittamalla alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön. (Huom: Ratkaisufunktio on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$, vaikkei itse differentiaaliyhtälö ole määritelty kohdassa $x = 0$. Tämä voitaisiin korjata kirjoittamalla alkuperäinen yhtälö muodossa $xy' = y$.)

Esimerkki 1.8 Määritä differentiaaliyhtälölle $y' = y \sin x$ sellainen ratkaisu, että $y(0) = 1$.

RATKAISU. Funktion $a(x) = \sin x$ eräs integraalifunktio on $A(x) = -\cos x$, joten integroiva tekijä on $e^{-A(x)} = e^{\cos x}$. Kertomalla puolittain tällä lausekkeella saadaan

$$y'(x)e^{\cos x} - y(x)e^{\cos x}\sin x = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(y(x)e^{\cos x}) = 0.$$

Koska tehtävässä on annettu alkuehto, voidaan käyttää myös määrättyä integraalia; tällöin integroimismuuttujaa täytyy merkitä esimerkiksi t:llä (x voi sekoittua ylärajaan). Näin saadaan

$$0 = \int_0^x \frac{d}{dt}(y(t)e^{\cos t})\,dt = \Big/_{0}^{x} y(t)e^{\cos t} = y(x)e^{\cos x} - y(0)e^{\cos 0}.$$

Määrätyn integraalin avulla voidaan siis suoraan ottaa huomioon alkuehto $y(0) = 1$, joten saadaan $y(x)e^{\cos x} = 1 \cdot e^1 = e$, ja ratkaisu on $y(x) = e^{1-\cos x}$.

Tapa, jolla yllä olevaan tulokseen päädyttiin, yleistyy hieman hankalampiinkin tapauksiin. Näitä ovat lineaariset ja toisaalta separoituvat differentiaaliyhtälöt, joita käsittelemme myöhemmin erikseen. Ennen sitä käydään kuitenkin läpi differentiaaliyhtälöihin liittyvää terminologiaa.

2 Peruskäsitteet*

Tässä luvussa käydään läpi differentiaaliyhtälön ratkaisuihin liittyviä käsitteitä. Se ei ole jatkon kannalta välttämätön ja kuuluu oheislukemistoon, mutta jos tietyt termit aiheuttavat myöhemmin päänvaivaa, niihin voi palata etsimään vastausta tästä luvusta.

Määritelmä 2.1 Differentiaaliyhtälö on yhtälö, jossa esiintyy tuntematon funktio $y = y(x)$ ja sen derivaattoja. Se on yleisesti muotoa $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, jossa F on jokin $n + 2$ muuttujasta riippuva lauseke. Luku n on differentiaaliyhtälön kertaluku.

Tällaisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio $y = y(x)$, joka

- on määritelty jollakin avoimella välillä $x \in I$,
- on n kertaa jatkuvasti derivoituva,
- toteuttaa yhtälön kaikilla $x \in I$, ts.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \ x \in I.$$

Funktion y muuttujaa x ei yleensä kirjoiteta yhtälössä eksplisiittisesti näkyviin. Perusteluna voidaan ajatella, että differentiaaliyhtälö määrää funktion $y = y(x)$ implisiittisesti, hieman samalla tavalla kuin esimerkiksi yhtälössä $x^3 + y^3 = 1$. Differentiaaliyhtälöstä $y'' + y = 0$ ei tämän vuoksi voi suoraan päätellä, mitä merkintää muuttujasta on ajateltu käytettävän. Yleensä ajatellaan, että $y = y(x)$ tai $y = y(t)$, koska esimerkiksi fysikaalisissa sovelluksissa tavallisia muuttujia ovat paikka x tai aika t, mutta tällä ei tietenkään ole merkitystä yhtälön ratkaisumenetelmien valinnassa.

Esimerkki 2.2 a) Differentiaaliyhtälö $xy^2 + y' = 0$ on kertalukua 1. Sen ratkaisuja ovat mm.

- $y_0(x) = 0, \ x \in \mathbf{R}$;
- $y_1(x) = 2/x^2, \ x > 0$;
- $y_2(x) = 2/x^2, \ x < 0$;
- $y_3(x) = 2/(x^2 + 3), \ x \in \mathbf{R}$.

Ratkaisujen tarkistamiseen riittää derivointi ja sijoitus yhtälöön.
b) Differentiaaliyhtälön $y'' + 4y = 0$ kertaluku on 2. Jos $A, B \in \mathbf{R}$ ovat vakioita, niin funktio $y(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$ on yhtälön ratkaisu koko reaaliakselilla. Yleisemmin: differentiaaliyhtälön $y'' + \omega^2 y = 0$ ratkaisuja ovat $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.
c) Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä $e^{y'+y} = 0$ ei ole lainkaan ratkaisuja.

Yllä olevista esimerkeistä voidaan tehdä muutamia havaintoja.

- Differentiaaliyhtälöllä voi olla useita ratkaisuja ja niillä voi olla eri määrittelyvälit.
- Vaikka a-kohdan ratkaisujen y_1 ja y_2 lausekkeet ovat samat, niin ne ovat määritelmän mukaan eri ratkaisuja. Arkikielessä voidaan kuitenkin sanoa, että $2/x^2,\ x \neq 0$, on yhtälön ratkaisu.
- Ratkaisujen lausekkeissa voi esiintyä vapaita parametreja. Tämä liittyy ns. yleiseen ratkaisuun, josta puhutaan alempana lisää.
- Joillakin differentiaaliyhtälöillä ei ole lainkaan ratkaisuja. Tämä on käytännön kannalta hankala ominaisuus, mutta se voidaan onneksi kiertää tutkimalla ainoastaan **normaalimuotoisia** yhtälöitä, jotka ovat muotoa $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Kaikki sovelluksissa esiintyvät differentiaaliyhtälöt voidaan helposti muuntaa normaalimuotoisiksi (mahdollisesti yksittäisiä muuttujan x arvoja lukuunottamatta).
- Ratkaisujen määrittelyvälin lisäksi differentiaaliyhtälöön liittyy sen oma määrittelyalue, jolla normaalimuotoisen yhtälön kohdalla tarkoitetaan sellaista aluetta, jossa $(n+1)$:n muuttajan funktio f on määritelty. Ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoisen yhtälön $y' = f(x, y)$ tapauksessa määrittelyalue D on siis jokin xy-tason alue. Esimerkiksi yhtälön $y' = 1/(x-y)$ tapauksessa määrittelyalueeksi voidaan tilanteesta riippuen valita jompi kumpi puolitasoista $D_1 = \{(x, y) \mid x < y\}$ tai $D_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$.

Käytännön tilanteissa differentiaaliyhtälön avulla etsitään ratkaisua, joka on yksikäsitteinen. Tällaisen ratkaisun avulla voidaan esimerkiksi ennustaa systeemin käyttäytymistä tulevaisuudessa. Yleensä tähän tulokseen päästään kahdessa vaiheessa: etsitään aluksi kaikki mahdolliset ratkaisut, ja valitaan niistä ns. alku- tai reunaehtojen perusteella tilanteeseen sopiva ratkaisu.

Esimerkki 2.3 Jousella kattoon kiinnitetyn kappaleen y-koordinaatti $y = y(t)$ toteuttaa liikeyhtälön $my'' + ky = 0$, joka seuraa yhtälöstä $F = ma = my''$ ja Hooken laista, kun $y = 0$ kappaleen tasapainotilassa. Yllä olevan esimerkin valossa funktio $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ on yhtälön ratkaisu, jos $\omega = \sqrt{k/m}$. Koska $A, B \in \mathbf{R}$ ovat vapaita parametreja, ei tämän lausekkeen avulla voida tietenkään ennustaa kappaleen liikettä. Yksikäsitteisen aikakehityksen takaamiseksi tarvitaan esimerkiksi tiedot kappaleen alkuasemasta $y_0 = y(0)$ ja sen alkunopeudesta $v_0 = y'(0)$ hetkellä $t = 0$. Koska ratkaisulausekkeen perusteella $y'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$, niin alkuehdot johtavat yhtälöpariin

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A, \\ v_0 = y'(0) = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = B\omega, \end{cases}$$

josta ratkeaa $A = y_0$, $B = v_0/\omega$. Alkuehdot johtavat siis yksikäsitteiseen ratkaisuun, joka määrää kappaleen liikkeen täydellisesti. Lisäksi voidaan todeta, että alkuehdot voidaan valita millä tavalla tahansa, ja kuitenkin yhtälöllä on aina (yksikäsitteinen) ratkaisu.

Myöhemmin osoitetaan, että esimerkkien differentiaaliyhtälön $y'' + \omega^2 y = 0$ kaikki mahdolliset ratkaisut ovat muotoa $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, ja vakiot A, B ovat vapaasti valittavia parametreja. Tällaista ratkaisulauseketta kutsutaan differentiaaliyhtalön yleiseksi ratkaisuksi. Tämän käsitteen määrittelemineen niin, että se soveltuisi kaikille mahdollisille differentiaaliyhtälöille, on hieman hankalaa, minkä vuoksi seuraava määritelmä sisältääkin vain tärkeimmät ideat.

Määritelmä 2.4 Kertalukua n olevan differentiaaliyhtälön **yleinen ratkaisu** on jollakin välillä määritelty funktio $y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$, joka
(i) sisältää n kpl parametreja $C_1, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$,
(ii) toteuttaa yhtälön kaikilla (sallituilla) parametrien C_i arvoilla,
(iii) antaa (melkein) kaikki mahdolliset yhtälön ratkaisut, kun parametreille C_i annetaan eri arvoja.

Voidaan ajatella, että parametrit C_i ovat integroinneissa syntyviä vakioita. Esimerkiksi alkeellisen differentiaaliyhtälön $y' = g(x)$ ratkaisussa $y(x) = G(x) + C$, kun $G' = g$, esiintyy vain yksi parametri, mutta kertalukua n olevaa yhtälöä täytynee (ainakin mielikuvituksessa) integroida n kertaa, jotta kaikista derivaatoista päästään eroon. Vaikka näin ei käytännössä voida yleensä tehdä, tuntuu kuitenkin luonnolliselta, että parametrien (integroimisvakioiden) lukumäärä on sama kuin yhtälön kertaluku.

Esimerkki 2.5 Lauseke $y(t) = (A+B)\cos t$ ei ole differentiaaliyhtälön $y''+y = 0$ yleinen ratkaisu, vaikka siinä esiintyy kaksi vapaasti valittavaa parametria A, B; sen avulla ei saada lainkaan muotoa $C\sin t$ olevia ratkaisuja. Sen sijaan $y(t) = A\cos t + B\sin t$ on yleinen ratkaisu, kuten myöhemmin osoitetaan.

Joissakin tilanteissa vastaan tulee myös sellaisia yksittäisiä ratkaisuja, joita ei saada yleisen ratkaisun lausekkeesta, ja niitä sanotaan yhtälön **erikoisratkaisuiksi**. Mikä tahansa yksikäsitteisesti määritelty ratkaisu on differentiaaliyhtälön **yksittäisratkaisu**. Näitä saadaan esimerkiksi yleisestä ratkaisusta antamalla parametreille $C_1, \ldots, C_n$ kiinteät arvot tai jopa kokeilemalla sopivalta näyttäviä funktioita.

Esimerkki 2.6 Differentiaaliyhtälö $xy^2 + y' = 0$ on normaalimuodossa $y' = -xy^2$. Sen yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = \frac{2}{x^2 + C},$$

missä $C \in \mathbf{R}$. Ratkaisujen määrittelyjoukko riippuu vakion C arvosta ja siitä, millä muuttujan arvoilla yhtälöä halutaan tutkia. Yleisen ratkaisun avulla ei kuitenkaan saada kaikkein yksinkertaisinta ratkaisua, jolle $y_0(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Kyseessä on siis (ainoa) erikoisratkaisu. Tämän tyyppisiä erikoisratkaisuja kutsutaan ymmärrettävistä syistä triviaaliratkaisuiksi. Triviaaliratkaisu saadaan kuitenkin yleisestä ratkaisusta rajalla $C \to \infty$. Tämä on tyypillistä ja liittyy siihen, että erikoisratkaisut ovat yleensä yleisen ratkaisun funktioiden asymptootteja.

Yllä olevissa esimerkeissä on differentiaaliyhtälöiden ratkaisut annettu valmiina, jolloin ratkaisun tarkistaminen onnistuu derivoimalla. Mutta miten nämä ratkaisut voidaan johtaa yhtälöistä lähtien?

Koko differentiaaliyhtälöiden teoriaa varjostaa se seikka, että yleisiä ratkaisumenetelmiä on melko vähän. Esimerkiksi suurimmalla osalla muotoa $y' = f(x, y)$ olevista differentiaaliyhtälöistä ei ole "ratkaisukaavaa", joka antaisi yleisen tai edes jonkin yksittäisen ratkaisun lausekkeen. Hankalissa tilanteissa ainoastaan numeerisia menetelmiä käyttämällä voidaan selvittää ratkaisujen likiarvoja ja niiden kuvaajia. Korkeampien kertalukujen yhtälöiden kohdalla tilanne mutkistuu entisestään. Tämän vuoksi differentiaaliyhtälöitä tutkitaan aluksi tiettyjen erikoistapausten kautta lähinnä kertaluvuissa yksi ja kaksi. Onneksi nämä tapaukset ovat myös sovellusten kannalta kaikkein tärkeimpiä.

Yhteenvetona voidaan luetella tärkeimmät ongelmat:

- Milloin differentiaaliyhtälön ratkaisuille saadaan eksplisiittinen lauseke eli ratkaisukaava? (analyyttinen lähestymistapa)

- Jos ratkaisukaavaa ei ole, niin onko ratkaisuja kuitenkin olemassa ja ovatko alkuarvotehtävien ratkaisut yksikäsitteisiä? (teoreettinen lähestymistapa)

- Miten ratkaisujen likiarvoja lasketaan numeerisesti? (numeerinen lähestymistapa)

- Miten ratkaisut käyttäytyvät? Onko olemassa tasapainotiloja eli ratkaisuja $y(x) \equiv$ vakio? Ovatko ratkaisut jaksollisia tai onko niillä raja-arvoa äärettömyydessä? (kvalitatiivinen lähestymistapa)

3 Ensimmäisen kertaluvun DY

Kuten yllä todettiin, ei ole olemassa yleistä periaatetta normaalimuotoisen differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ ratkaisemiseksi. Numeerisilla menetelmillä yhtälöä $y' = f(x, y)$ voidaan kuitenkin käsitellä helposti, mutta niiden avulla ei saada ratkaisun lauseketta, vaan ainoastaan kuvaaja tms. Palaamme numeerisiin menetelmiin luvun lopussa, mutta käsittelemme aluksi analyyttisesti ratkevia 1. kertaluvun yhtälötyyppejä, joista tärkeimpiä ovat lineaariset ja toisaalta separoituvat yhtälöt.

3.1 Lineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö

Johdanto-luvun differentiaaliyhtälön $y' = a(x)y$ ratkaisuilla on tietty yleinen ominaisuus, joka on helppo todeta myös ilman ratkaisukaavaa. Jos nimittäin $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat molemmat yhtälön ratkaisuja, niin myös funktio $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ on ratkaisu, kun A, B ovat vakioita. Ratkaisujen lineaarikombinaatio on siis edelleen ratkaisu, joten on luonnollista kutsua itse yhtälöä lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi.

Jos p ja r ovat jollakin välillä jatkuvia funktioita, niin myös yleisempää yhtälöä $y' + p(x)y = r(x)$ kutsutaan lineaariseksi, vaikka tapauksessa $r \neq 0$ ratkaisuilla ei enää olekaan yllä mainittua ominaisuutta. Nimityksen syynä on lähinnä se, että yhtälö voidaan ratkaista täydellisesti samalla periaatteella kuin edellisen kappaleen yksinkertaisempi tapaus. Tapauksessa $r \equiv 0$ yhtälöä kutsutaan homogeeniseksi, muussa tapauksessa epähomogeeniseksi.

Käymme seuraavaksi läpi yhtälön $y' + p(x)y = r(x)$ ratkaisemisen ns. integroivan tekijän avulla. Aikaisempaa menetelmää mukaillen valitaan ensin jokin integraalifunktio $P(x) = \int p(x)\,dx$ ja kerrotaan yhtälö puolittain **integroivalla tekijällä** $e^{P(x)}$. Tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$y'(x)e^{P(x)} + y(x)p(x)e^{P(x)} = r(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x)e^{P(x)}\right) = r(x)e^{P(x)}.$$

Tästä integroimalla saadaan ensin

$$y(x)e^{P(x)} = \int r(x)e^{P(x)}\,dx + C$$

ja tämän avulla yleinen ratkaisu

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int r(x)e^{P(x)}\,dx.$$

Tämä kaava antaa siis lineaarisen yhtälön kaikki ratkaisut, ja niiden määrittelyväli on sama kuin funktioilla p ja r. Käytännössä ratkaisukaavaa ei tietenkään pidä opetella ulkoa, vaan mieluummin seurata yleistä periaatetta vaihe vaiheelta.[2]

[2]Huomaa, että integraalifunktiossa $P(x)$ ei tarvita integroimisvakiota, koska se ainoastaan muuttaisi yllä olevaa vakiota C.

Jos yhtälön $y'+p(x)y=r(x)$ lisäksi on annettu alkuehto $y(x_0)=y_0$, voidaan käyttää määrättyä integraalia välillä $[x_0,x]$, jolloin saadaan suoraan alkuehdon toteuttava ratkaisu. Usein on kuitenkin helpompi tutkia alkuehtoa jälkikäteen yleisen ratkaisun lausekkeen avulla, jolloin vakion C arvo kiinnittyy.

Esimerkki 3.1 Sadan litran vesisäiliöön virtaa nopeudella 5 l/min suolaliuosta, jonka konsentraatio on 100 g/l, ja vastaava määrä täysin sekoittunutta liuosta valuu pois. Miten suolan määrä $y=y(t)$ kasvaa säiliössä, jos se on aluksi nolla?

Esimerkki 3.2 Kahvikupin lämpötila hetkellä $t=0$ on 90 °C ja ympäristön $T_Y=20\,°\mathrm{C}$. Viiden minuutin kuluttua kahvi on jäähtynyt 60 asteeseen. Mikä on sen lämpötila 10 minuutin kuluttua? Oletetaan kahvin jäähtyvän Newtonin jäähtymislain $T'(t)=k(T_Y-T(t))$ mukaisesti.

Esimerkki 3.3 Määritä differentiaaliyhtälölle $y'-y=e^x+1$ a) yleinen ratkaisu; b) alkuehdon $y(0)=0$ toteuttava ratkaisu.

Esimerkki 3.4 Ratkaise alkuarvotehtävä $y'+y\cot x=e^{\cos x}$, $y(\pi/2)=3$.

Ratkaisukaavasta nähdään, että epähomogeenisen yhtälön $y'+p(x)y=r(x)$ ratkaisu on muotoa "homogeenisen yhtälön $y'+p(x)y=0$ yleinen ratkaisu + epähomogeenisen yhtälön $y'+p(x)y=r(x)$ yksittäisratkaisu". Yhtälö voidaan ratkaista myös tällä periaatteella, jos löydetään jokin yksittäisratkaisu, mutta 1. kertaluvun yhtälöiden kohdalla tästä on hyötyä vain silloin, kun ratkaisussa esiintyvän integraalin laskeminen on hankalaa. Sen sijaan korkeamman kertaluvun yhtälöille ratkaisukaavaa ei ole, ja yksittäisratkaisun muodostaminen muotoa $y_0(x)=$ "$r(x)$ yleisillä kertoimilla" tms. olevan yritteen avulla on eräs keskeinen ratkaisumenetelmä. Niiden yhteydessä käsitellään myös esimerkkejä menetelmän soveltamisesta 1. kertaluvun yhtälöihin.

3.2 Separoituva DY

Alussa esitetty johdatteleva ratkaisutapa yhtälölle $y'=a(x)y$ yleistyy melko suoraviivaisesti myös ns. separoituville differentiaaliyhtälöille, jotka ovat muotoa $y'=f(x)g(y)$. Tässä f ja g ovat jatkuvia yhden muuttujan funktioita.

Jos oletetaan, että ratkaisulle y on voimassa $g(y(x))\neq 0$ kaikilla x, niin saadaan

$$y'(x)=f(x)g(y(x))\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))}=f(x),$$

josta integroimalla

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx=\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Jos $H'=1/g$ eli H on jokin funktion $1/g$ integraalifunktio, niin

$$\frac{d}{dx}H(y(x))=H'(y(x))y'(x)=\frac{y'(x)}{g(y(x))}.$$

Integroitu yhtälö on siis yhtäpitävä yhtälön $H(y(x)) = F(x) + C$ kanssa, jota kutsutaan yhtälön implisiittiseksi ratkaisuksi. Koska $1/g$ on joko aina positiivinen tai aina negatiivinen, niin sen integraalifunktio H on aidosti monotoninen. Näin implisiittisestä ratkaisusta saadaan ainakin periaatteessa yleinen ratkaisu

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + C),\ C \in \mathbf{R}.$$

Käytännössä ongelmaksi muodostuu usein se, että vaikka integraalifunktiot F ja H voitaisiinkin muodostaa alkeisfunktioden avulla, ei käänteisfunktiolla H^{-1} enää ole tällaista esitystä. Tällöin täytyy tyytyä implisiittiseen ratkaisuun.

Samaan tulokseen päädytään helpommin seuraavalla hieman epätäsmällisellä laskulla

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow H(y) = F(x) + C \Leftrightarrow y = y(x) = H^{-1}(F(x) + C). \end{aligned}$$

Se, että differentiaaleja dx, dy voidaan käsitellä näin ja integroida vasemmalla muuttujan y ja oikealla muuttujan x suhteen, täytyisi kuitenkin perustella erikseen käyttämällä sopivaa muuttujanvaihtoa. Sivuutamme yksityiskohdat, mutta siaan palataan kuitenkin luentoesimerkkien yhteydessä.

Alkuehdon $y(x_0) = y_0$ avulla saadaan yleensä kiinnitettyä vakio C kuten aikaisemminkin; tämän voi tehdä myös pelkän implisiittisen ratkaisun tapauksessa. Määrättyä integraalia käyttämällä saadaan alkuehdon toteuttava ratkaisu ilman yleisen ratkaisun välivaihetta.

Esimerkki 3.5 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2xe^y$ alkuehdolla $y(0) = 0$.

Esimerkki 3.6 Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{e^y \sin x}{1 + y},\ y(0) = 1.$$

Jos ehto $g(y(x)) \neq 0$ ei ole voimassa, muuttuu tilanne hankalammaksi. Ensimmäisenä askeleena voidaan havaita, että jokaista funktion g nollakohtaa α vastaa vakioratkaisu $y(x) \equiv \alpha$, koska tällöin $y'(x) \equiv 0 = g(\alpha) \equiv g(y(x))$. Näitä ratkaisuja kutsutaan yhtälön triviaaliratkaisuiksi. Ratkaisujen etsiminen ei kuitenkaan aina pääty tähän, sillä joillakin yhtälöillä on muitakin ratkaisuja kuin yllä mainitut; tyypillisesti niitä saadaan "liimaamalla yhteen" palasia triviaali- ja separoimalla saaduista ratkaisuista. Tämän vuoksi on tärkeää selvittää, milloin tämä tilanne on mahdollinen.

Kysymys liittyy olennaisesti yleisen alkuarvotehtävän $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$, ratkaisun yksikäsitteisyyteen, mikä tunnetaan onneksi hyvin.

Lause 3.7 *Tarkastellaan alkuarvotehtävää $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$.*
(i) Jos f on jatkuva (kahden muuttujan funktio), niin ainakin yksi alkuehdon toteuttava ratkaisu on olemassa jollakin pisteen x_0 sisältävällä välillä.
(ii) Jos lisäksi f on jatkuvasti derivoituva muuttujan y suhteen, niin alkuehdon toteuttava ratkaisu on yksikäsitteinen.
(iii) Yksikäsitteisyys on voimassa myös silloin, kun kohdan (i) lisäksi f on jatkuvasti derivoituva muuttujan x suhteen ja $f(x_0, y_0) \neq 0$.

Lauseen todistus on pitkähkö ja sivuutetaan.[3] Ratkaisujen yksikäsitteisyys ei seuraa pelkästään kohdasta (i), sillä on olemassa koko tasossa jatkuvia funktioita f, joihin liittyvillä alkuarvotehtävillä ei ole yksikäsitteisiä ratkaisuja millään luvuilla x_0, y_0.

Separoituville yhtälöille saadaan lauseen perusteella seuraava tulos.

Lause 3.8 *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y' = f(x)g(y)$, missä f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva.*
(i) Jokaista funktion g nollakohtaa α vastaa triviaaliratkaisu $y(x) \equiv \alpha =$ vakio.
(ii) Yhtälön kaikki muut ratkaisut (= yleinen ratkaisu) saadaan yllä esitetyllä tavalla separoimalla muuttujat ja integroimalla.

Lauseen perustelu seuraa alla olevista geometrisista seikoista, jotka ovat voimassa yleisestikin lauseen 3.7(ii) tilanteessa:

- Yhtälön ratkaisukäyrät (ratkaisujen kuvaajat, integraalikäyrät) eivät koskaan "pääty kesken", vaan ne joko törmäävät yhtälön määrittelyalueen reunaan tai katovat $\pm$ äärettömyyteen.
- Yhtälön määrittelyalueen jokaisen pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee yksikäsitteinen ratkaisukäyrä.
- Erityisesti: ratkaisukäyrät eivät voi leikata toisiaan eikä yksittäinen ratkaisukäyrä voi haarautua kahteen tai useampaan osaan.

Separoituville yhtälöille muut ratkaisukäyrät eivät siis voi leikata triviaaliratkaisukäyriä $y = \alpha$, joten kaikille muille ratkaisuille ehto $g(y(x)) \neq 0$ on automaattisesti voimassa!

Esimerkki 3.9 Ratkaise alkuarvotehtävä $y' = -xy^2$, kun a) $y(0) = 1/2$; b) $y(0) = 0$.

Esimerkki 3.10 Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{1-y}{x}, \ y(1) = 2,$$

suoraan määrättyä integraalia käyttämällä.

Esimerkki 3.11 appaleen putoamisnopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mg - kv^2 = mv'$, jos ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön. Kappale pudotetaan (levosta) hetkellä $t = 0$. Määritä sen nopeus $v = v(t)$ ja rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

Esimerkki 3.12 Osoita, että alkuarvotehtävällä $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, on ainakin kaksi ratkaisua. (Huom: Tulkinnan $y^{2/3} = \sqrt[3]{y^2}$ mukaan yhtälö on määritelty koko tasossa.)

---

[3] Todistus perustuu ns. Picard-Lindelöf-iterointiin, jonka muotoiluun osallistui suomalainen matemaatikko Ernst Lindelöf (1870-1946).

Esimerkki 3.13 Onko differentiaaliyhtälöllä $x^2y' + y = 0$ sellaista ratkaisua, jolle $y(0) = 1$?

Esimerkki 3.14 Veden korkeus sylinterimäisessä säiliössä on h_0. Hetkellä $t = 0$ pohjassa oleva hana avataan, ja 20 minuutin kuluttua veden korkeus on enää $h_0/4$. Missä ajassa säiliö tyhjenee, kun Bernoullin lain mukaan vedenkorkeus $h = h(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $h' = -c\sqrt{h}$ ja c on vakio?

3.3 Numeeriset menetelmät*

Vaikka 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöille ei ole yleistä ratkaisumenetelmää, on niiden numeerinen ratkaiseminen (ainakin periaatteessa) yllättävän helppoa. Seuraavassa esitetään yksinkertaisin tällainen menetelmä, josta on olemassa kaksi eri versiota: Eulerin menetelmä ja implisiittinen Eulerin menetelmä.

Tarkastellaan aluksi differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ geometrista tulkintaa. Jos ratkaisukäyrä $y = y(x)$ kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta, niin yhtälön mukaan $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$, ts. ratkaisukäyrän tangentin kulmakerroin voidaan laskea suoraan yhtälöstä, vaikka ratkaisua ei tunneta! Yhtälöä voidaan siis havainnollistaa xy-tason vektorikentällä $\mathbf{i} + f(x_k, y_k)\mathbf{j}$, kun se piirretään sopiviin hilapisteisiin (x_k, y_k). Ratkaisukäyrät ovat sellaisia käyriä, jotka mahdollisimman hyvin seuraavat tätä vektorikenttää, ja periaatteessa näitä käyriä voi piirtää hyvin alkeellisilla välineillä.

Esimerkki 3.15 Hahmottele differentiaaliyhtälön $y' = \sin(xy)$ ratkaisukäyriä suuntakentän avulla.

Tämä geometrinen idea johtaa suoraan Eulerin menetelmään. Tehtävänä on määrittää yhtälön $y' = f(x, y)$ ja alkuehdon $y(a) = y_0$ toteuttavan ratkaisun likiarvo pisteessä $x = b$. Käytännössä vastaavia likiarvoja täytyy laskea useissa välin $[a, b]$ pisteissä, joten niiden avulla voidaan myös hahmotella ratkaisun kuvaaja. Valitaan siis askelten lukumäärä n, joka määrää **askelpituuden** $h = (b - a)/n$. Määritellään välin $[a, b]$ tasaväliset jakopisteet $x_k = a + kh$, $0 \le k \le n$, jolloin $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Jokaista jakopistettä vastaa tarkan ratkaisun approksimaatio $y_k \approx y(x_k)$, joista ainoastaan $y_0 = y(x_0) = y(a)$ tunnetaan. Yllä olevan geometrisen idean perusteella pisteestä (x_k, y_k) kannattaa edetä ratkaisukäyrän tangentin suuntaan, joten seuraava approksimaatio lasketaan edellisen avulla muodossa $y_{k+1} = y_k + hy'(x_k) = y_k + hf(x_k, y_k)$, $0 \le k \le n - 1$. Tällöin siis $y_n \approx y(b)$ ja approksimaation tarkkuus näyttäisi paranevan jakovälien lukumäärän n kasvaessa. Eulerin menetelmä voidaan siis kiteyttää palautuskaavaan

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),\ \ 0 \le k \le n - 1.$$

Esimerkki 3.16 Määritä differentiaaliyhtälön $y' = y$ ratkaisun likiarvo pisteessä $x = 1$, kun $y(0) = 1$. Käytä Eulerin menetelmää askelpituudella $h = 1/n$ ja tutki tapausta $n \to \infty$.

Esimerkki 3.17 Määritä alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$, ratkaisun likiarvo $y(1)$ käyttämällä Eulerin menetelmää ja askelpituuksia 0.2, 0.01, 0.001 ja 10^{-4}.

Jos yhtälössä $y' = f(x, y)$ esiintyvä funktio f on riittävän säännöllinen, niin Eulerin menetelmän virhe on muotoa

$$\frac{1}{2}y''(\xi)(b-a)h,$$

missä $\xi \in [a, b]$. Virhe on siis suuruusluokkaa $\mathcal{O}(h)$, ts. $|y_n - y(b)| \leq C(b-a)h = C(b-a)^2/n$, jossa C on funktiosta f riippuva vakio; esimerkiksi

$$C = \frac{1}{2}\max\{|y''(x)| \mid a \leq x \leq b\}.$$

Vaikka ratkaisua y ei tunneta, voidaan lauseketta $|y''(x)|$ usein arvioida derivoimalla alkuperäinen yhtälö $y' = f(x, y)$ puolittain.

Askelpituuden lyhentäminen parantaa siis approksimaation tarkkuutta ainakin teoriassa. Käytännössä näin ei ole, sillä askelpituuden lyhentyessä välivaiheiden määrä kasvaa ja tästä aiheutuva pyöristysvirheiden kasaantuminen johtaa siihen, että tarkkuus alkaa tietyn rajan jälkeen huonontua, kuten esimerkissä 3.17.

Tämän vuoksi on tärkeää kehittää parempia menetelmiä, joissa yhden askeleen virhe on olennaisesti pienempi kuin Eulerin menetelmässä. Tällainen on mm. Runge-Kutta-menetelmä, jossa kokonaisvirhe on muotoa $Ch^4 = C/n^4$, vaikka yhden askeleen laskeminen vaatiikin hieman enemmän työtä kuin Eulerin menetelmässä. Eri menetelmien tarkkuutta kuvataan kutsumalla Euleria 1. kertaluvun ja vastaavasti Runge-Kuttaa 4. kertaluvun menetelmäksi.

Sivuutamme tehokkaampien menetelmien käsittelyn, mutta on syytä mainita myös Eulerin menetelmän implisiittinen versio, joka perustuu palautuskaavaan $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$; kulmakerroin lasketaan siis jakovälin alkupisteen sijasta sen loppupisteessä. Jokaisella askeleella tuntematon y_{k+1} täytyy ratkaista (yleensä numeerisesti) tästä yhtälöstä, mikä hankaloittaa menetelmän käyttöä. Implisiittinen menetelmä sopii kuitenkin tavallista Euleria paremmin esim. systeemin aikakehityksen tutkimiseen, sillä se pystyy paremmin ennakoimaan yhtälön ratkaisujen käyttäytymistä. Yksittäisen askeleen virhe on kuitenkin edelleen muotoa $\mathcal{O}(h)$ eli kyseessä on 1. kertaluvun menetelmä. Tämä johtuu siitä, että menetelmien virhearviot voidaan johtaa samantapaisista approksimaatioista

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(s)\,ds \approx \begin{cases} y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = hf(x_k, y(x_k)) \\ y'(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = hf(x_{k+1}, y(x_{k+1})), \end{cases}$$

joista ylempi johtaa Eulerin menetelmään ja alempi sen implisiittiseen versioon.

Esimerkki 3.18 Tutkitaan alkuarvotehtävän $y' = -10y + 10$, $y(0) = 2$, ratkaisun aikakehitystä käyttämällä a) Eulerin menetelmää; b) implisiittistä Eulerin menetelmää. Millä askelpituuksilla menetelmät antavat oikean raja-arvon, kun $t \to \infty$?