

MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, II / 2023

Laskuharjoitus 3A alkuviikolla 45

Aihepiiri: Funktion jatkuvuus ja raja-arvo, derivaatta

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 14.11. klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. (Adams & Essex 1.2.39) Raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on funktion f derivaatta $f'(x)$, jos se on olemassa. Laske määritelmän perusteella funktion $f(x) = 1/x$ derivaatta, kun $x \neq 0$.

2. a) (A & E 4.4.15) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}.$$

b) Voiko L'Hopitalin sääntöä käyttää raja-arvon $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ laskemiseen?

3. a) Toisen asteen yhtälön $ax^2 - x + b = 0$ yksi ratkaisu on muotoa

$$f(a) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2a},$$

kun $a \neq 0$. Laske raja-arvo $\lim_{a \rightarrow 0} f(a)$.

b) Mitä tapahtuu yhtälön toiselle ratkaisulle, kun $a \rightarrow 0$?

4. Laske seuraavien funktioiden derivaatat kohdassa $x = 2$:

$$f(x) = (2x^2 - 7)^5, \quad g(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad h(x) = x(\sin(\pi x/2) - \cos(\pi x)).$$

5. (A & E 4.8.41) Poikkileikkaukseltaan suorakulmion muotoisen vaakasuoran palkin taivutusjäykkyys pystysuorassa suunnassa on suoraan verrannollinen sen leveyden ja korkeuden kuution tuloon, ts. se on muotoa cxy^3 , missä $c > 0$ on vakio. Määritä jäykimmän mahdollisen palkin leveys ja korkeus, kun se sahataan R -säteisestä tukista.

6. (Maple tai symbolinen laskin: Palauta 1 sivu Maple-koodia tai sopivia välivaiheita.) Kuulantyyntönnön tulos riippuu kuulun alkunopeudesta v , lähtökorkeudesta h ja työntönnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:

$$f := x \rightarrow \frac{v \cos(x) \left(v \sin(x) + \sqrt{v^2 \sin^2(x) + 2hg} \right)}{g},$$

jossa $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $v = 14$ ja $g = 9.81$. **Lähtökorkeus lasketaan opiskelijanumerosta (mahdolliset kirjaimet pois):** 301234 $\Rightarrow h = 3.01234$. Määritä työntönnön optimaalinen suuntakulma asteina ja maksimitulos.

Vihje: Muista kertomerkit. Kuvaajasta voit tarkistaa, että olet oikeilla jäljillä.

Loppuviikon laskuharjoitukset löytyvät seuraavalta sivulta.

Laskuharjoitus 3L loppuviikolla 45
Aihepiiri: Taylor-polynomi, alkeisfunktiot

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Muodosta kolmannen asteen Maclaurin-polynomit $P_3(x) = P_3(x; 0)$ funktiolle $f(x) = \cos(2x)$ ja $g(x) = xe^{3x}$
 - a) laskemalla tarvittavat derivaatat;
 - b) käyttämällä apuna kosinin ja eksponenttifunktion tunnettuja polynomeja.
2. Ns. Mooren lain (alkuperäisen version) mukaan uusimman mallin mikropiirillä olevien komponenttien lukumäärä $N = N(t)$ kaksinkertaistuu n. 24 kuukauden välein.
 - a) Funktiolla $N(t) = N_0 e^{kt}$ on lakiin liittyvä ominaisuus $N(t + 24) = 2N(t)$ kaikilla t , kun vakio $k > 0$ valitaan sopivalla tavalla: Miten?
 - b) Missä ajassa komponenttien lukumäärä kolminkertaistuu?
3. (vrt. Adams & Essex 4.8.46, s.267) Teekkari katselee valkokangasta, jonka korkeus on 5 metriä ja jonka alareuna on 1 m silmien tason yläpuolella.

- a) Päättele, että valkokangas näkyy (pystytasossa) kulmassa

$$\alpha(x) = \arctan(6/x) - \arctan(1/x),$$

kun x on teekkarin vaakasuora etäisyys kankaasta.

- b) Määritä $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)$ joko kuvion tai a-kohdan lausekkeen avulla.
- c) Miltä etäisyydeltä kangas näkyy suurimmassa mahdollisessa kulmassa (pystytasossa mitattuna)? Välivaiheet on tarkoitus laskea käsin, mutta tuloksen voi toki tarkistaa koneella.