

MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, II / 2023

Laskuharjoitus 5A alkuviikolla 47

Aihepiiri: Integraali

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 28.11. klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. Laske integraalit

$$\int_0^1 \frac{x}{1+2x^2} dx, \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+3x^4}} \text{ ja } \int_{-1}^1 x^2 e^{-x^3} dx.$$

Vihje: Huomaa yhdistetty funktio ja sisäfunktion derivaatta.

2. Suppeneeko epäoleellinen integraali $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$? Vihje: Mitä on $D \ln(\cos x)$?
3. a) Johda R -säteisen pallon h -korkuisen kalotin pinta-alan lauseke $A = 2\pi Rh$.
Vihje: Kyseessä on funktion $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ liittyvä pyörähdyspinta välillä $R - h \leq x \leq R$. Integroitava lauseke sievenee hyvin yksinkertaiseen muotoon.
b) Päättelä a-kohdan tuloksen perusteella koko pallon pinta-alan lauseke.

4. Laske integraali

$$\int_0^5 |2x - 6| dx.$$

5. Mistä näkee, että seuraava lasku on virheellinen:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^1 -\frac{1}{x} = -2?$$

Mitä oikean tuloksen pitäisi olla?

6. Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ Laplace-muunnos on uusi funktio $\mathcal{L}f$, jonka arvo kohdassa $s > 0$ lasketaan kaavalla

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Osoita, että $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s+3}$, kun $f(x) = e^{-3x}$.

Laskuharjoitus 5L loppuviikolla 47
Aihepiiri: Integroimismenetelmät

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Laske osittaisintegroinnin avulla $\int_0^\pi x \sin(x) dx$.

2. Laske integraalit

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad \text{ja} \quad \int_0^3 \sqrt{9-u^2} du$$

sijoittamalla $x = t^2$, $u = 3 \sin v$.

3. Laske integraali $\int \frac{5-x}{2x^2+x-1} dx$.

4. a) Johda osittaisintegroinnin avulla palautuskaava

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

(Merkintöjen lyhentämiseksi voit laskea ilman raja-arvoa eli ∞ integroinnin ja sijoituksen ylärajana)

b) Laske a-kohtaa käyttämällä integraali

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx.$$

Integraalin geometrisia sovelluksia

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x) dx$ on funktion kuvaajan ja x -akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$, niin $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri, niin saadun pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- Jos kappaletta leikataan yz -tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri, se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x -akselin ympäri, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$.

- Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää y -akselin ympäri, niin vastaava tilavuus on

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$