

**MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, II / 2023**

**Laskuharjoitus 6A** alkuviikolla 48

Aihepiiri: Differentiaaliyhtälöt

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–6 palautetaan MyCoursesin kautta **sunnuntaihin 3.12.** klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. Ratkaise separoituvat differentiaaliyhtälöt

a)  $y' = 2 + y$ ,  $y(0) = 2$ ;

b)  $y' = y/x$ ,  $y(1) = 3$ .

B-luokan vihje: Alkuehdon perusteella tutkitaan tapausta  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

2. Kaukolämpöputken sisäsäde on 1 ja ulkosäde 2. Putken sisäpinnan lämpötila on 100 ja ulkopinnan lämpötila 0. Määritä putken lämpötila  $u = u(r)$  säteen  $r$  funktiona arvoilla  $1 \leq r \leq 2$ . Lämpötila toteuttaa differentiaaliyhtälön  $ru'' + u' = 0$ .

Vihje: Merkitään  $u'(r) = v(r)$ , jolloin  $u'' = v'$ . Ratkaise ensin  $v(r)$  separoituvasta differentiaaliyhtälöstä  $rv' + v = 0$  ja sen jälkeen  $u(r)$  integroimalla. Menetelmän nimi on *kertaluvun pudotus*.

3. a) Määritä yleinen ratkaisu yhtälölle  $y'' = \sin 2x$ . Etsi se erikoisratkaisu, joka toteuttaa  $y(0) = -1/4$ ,  $y(\pi/4) = \pi/2$ .

b) Anna jokin 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on  $y = x^4$ .  
Keksitkö toista?

4. Näytä, että funktiopari

$$\begin{cases} y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ z(t) = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t \end{cases}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälösystemin

$$\begin{cases} y'(t) - z'(t) = y(t), \\ 2y'(t) - z'(t) = z(t). \end{cases}$$

5. Etsi differentiaaliyhtälön  $3x'' + 2x' - x = 0$  yleinen ratkaisu. Kirjoita ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 0$ .

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö  $3x'' + 2x' - x = t^2 - 1$  alkuehdoilla  $x(0) = -1$  ja  $x'(0) = 0$ .

## Laskuharjoitus 6L loppuviikolla 48

Aihepiiri: Differentiaaliyhtälöt

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Etsi differentiaaliyhtälön  $x'' - 2x' + 5x = e^t$  ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ .
2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = C \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

yleinen ratkaisu.

Vihje: Kokeile erikoisratkaisuyritettä  $x_p(t) = Kt \sin(\omega t) + Lt \cos(\omega t)$ .

3. Tarkastellaan vaimennettua massajousisysteemiä. Punnuksen poikkeamalle  $x(t)$  tasapainoasemastaan hetkellä  $t \geq 0$  on johdettu differentiaaliyhtälö

$$mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0, \quad (1)$$

jossa  $m > 0$  on punnuksen massa,  $\mu \geq 0$  on kitkasta johtuva vaimennuskerroin ja  $k > 0$  on jousivakio.

Systemiin varastoitunut kokonaisenergia hetkellä  $t \geq 0$  saadaan kaavasta

$$E_{tot}(t) = \frac{1}{2}m [x'(t)]^2 + \frac{1}{2}k [x(t)]^2. \quad (2)$$

Perustele kaava (2). Osoita että kokonaisenergia on ei-kasvava ajan funktio. Osoita vielä että kokonaisenergia säilyy kun  $\mu = 0$ , eli kun kitkaa ei ole.

Vihje: Laske derivaatta  $\frac{d}{dt}E_{tot}(t)$  ja sievennä saatua lauseketta käyttäen differentiaaliyhtälöä (1).