Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Tietokoneharjoitus: ratkaisut

Johdanto

Kurssin 1. alkuviikon harjoituksissa tutustutaan Maple-ohjelmaan, joka on symbolisen laskennan matematiikkaohjelma. Sen avulla voidaan suorittaa kaikki symbolisten laskinten toiminnot, piirtää kuvia ja paljon muuta. Lisäksi laskut on helppo tallentaa työarkille (Maple Worksheet) myöhempää käyttöä tai muokkausta varten.

Ohje

Ohjelmassa on kolme erilasta tilaa:
- laskut ja muut operaatiot tehdään **käskyrivillä**, joka alkaa merkillä >.
  Lisää käskyrivejä saa yläpalkin [> -painikkeella tai pikanäppäimillä Ctrl + J, Ctrl + K.
  Käsky suoritetaan siirtämällä kursori käskyriville ja painamalla Enter.
  Kursorin ei tarvitse olla rivin lopussa!
- **tekstitilassa** voi kirjoittaa tavallista tekstiä (kuten tämä ohje).
  Käskyrivi muutetaan tekstitilaan pikanäppäimellä Ctrl + t tai yläpalkin T-painikkeella.
- **kaavaeditorilla** voi kirjoittaa matemaattisia kaavoja tekstin sekaan.
  Kaavaeditoriin ja siitä pois pääsee F5-näppäimellä.

Yläpalkin suurennuslasi-näppäimellä voi kasvattaa fonttikokoa.
Voit kokeilla myös vasemman reunan pikavalikkoja, mutta kaikki alla olevat tehtävät voi tehdä myös ilman niitä.

Klikkaa nuolenpäitä avataksesi kunkin kohdan. Siirrä kursori esimerkkien käskyriville ja paina Enter.
Käy tällä tavalla läpi kaikki esimerkit ja tee sen jälkeen aiheeseen liittyvät tehtävät.
Työarkki kannattaa tallentaa aika ajoin: Ctrl + s

Peruslaskentaa

Kokeile tavallista numeroilla laskemista: yhteen- , kerto- ja jakolaskuja sekä potenssiinkorotusta.

Esimerkki:

> $2+3$

$$5 \tag{3.1}$$

> $2 \cdot 3$

$$6 \tag{3.2}$$

> $\frac{18}{15}$

$$\frac{6}{5} \tag{3.3}$$

> 2^3

$$8 \tag{3.4}$$

Lisätietoa muista laskutoimituksista:

> $?arith$

Omia kokeiluja:

> $3^5 - \frac{10}{2}$

$$238 \tag{3.5}$$

Potenssi saadaan kirjoittamalla ^ ja välilyönti.

Muuttujien määrittely

Esimerkki:

> a := 4; b := 8;   # Huom! 1) kaksoispiste yhtäsuuruusmerkin edessä! Kaksoispisteetön = on varattu mm. yhtälöitä varten.
> #   2) samalla rivillä olevat käskyt erotetaan symbolilla ; tai :

$$a := 4$$
$$b := 8 \tag{4.1}$$

> $a + b$

$$12 \tag{4.2}$$

Muuttujan arvon poistaminen:

> $a :=' a'$

$$a := a \tag{4.3}$$

> $a + b$

$$a + 8 \tag{4.4}$$

Poistetaan kaikki määrittelyt:

> $restart$

> $a + b$

$$a + b \tag{4.5}$$

Tehtävä: Määrittele muuttujat $x = 6$, $y = 9$ ja $z = -5$ ja laske niiden avulla $x \cdot y$, $\frac{x+z}{x-y}$ sekä $x^{y \cdot z}$.

> $x := 6; y := 9; z := -5$

$$x := 6$$
$$y := 9$$
$$z := -5 \tag{4.6}$$

> $x \cdot y; \frac{x+z}{x-y}; x^{y \cdot z}$

$$54$$
$$-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{103945637534048876111514866313854976} \tag{4.7}$$

Alkeisfunktioita

Esimerkki:

> sqrt(2)   # sqrt = neliöjuuri

$\sqrt{2}$ **(5.1)**

> $evalf(\%)$ # evalf = evaluate to floating point number, % = edellisen käskyn tulos

1.414213562 **(5.2)**

> $evalf(\%\%, 20)$ # %% = toiseksi edellisen käskyn tulos, 20 = haluttu tarkkuus ``

#` `edellisiin tuloksiin voi viitata myös tuloksen numeron avulla näppäinyhdistelmällä CTRL + L

1.4142135623730950488 **(5.3)**

> sqrt(2.0)
jos lauseke sisältää desimaalilukuja, niin lasketaan (yleensä) likiarvoilla
huomaa **desimaalipiste.**

1.414213562 **(5.4)**

> exp(1)

e **(5.5)**

> $evalf(\exp(1))$ # $e^x = \exp(x)$,

2.718281828 **(5.6)**

> $\exp(\ln(x))$ #` `luonnollinen logaritmi

6 **(5.7)**

> $\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}$$ **(5.8)**

<u>Tehtävä:</u> Laske cos(π/3), tan(5π/6) ja luvun $\cot(\ln(1+e^2))$ likiarvo. Mikä on luvun π sadas desimaali?

Huomaa, että e = exp(1) ja e^2 = exp(2). Lisäksi π = Pi = 3.1415... (pi = kreikkalainen kirjain pii)

> $\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right); \tan\left(\frac{5\cdot\mathrm{Pi}}{6}\right)$

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$$ **(5.9)**

> $evalf(\mathrm{Pi}, 101)$

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640 62\
86208998628034825342117068 0 **(5.10)**

>

Näyttää siltä, että desimaali on 0, mutta se voi olla pyöristetty. Tarkistetaan:

> $evalf(\mathrm{Pi}, 102)$

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062\
862089986280348253421170679 8 **(5.11)**

Vastaus: 100. desimaali on 9

Lausekkeiden käsittely

<u>Esimerkki:</u>

> $x := 'x'; y := 'y'$ #` `Alustetaan x ja y

$$x := x$$
$$y := y \qquad (6.1)$$

> $\dfrac{x\cdot(3\cdot x+2)}{x} - x$ #` `Jotkin lausekkeet sievennetään automaattisesti

$$2\,x+2 \qquad (6.2)$$

> $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

$$\sin(x)^2+\cos(x)^2 \qquad (6.3)$$

> $simplify(\%)$ #` `mutta joskus se täytyy vaatia erikseen

$$1 \qquad (6.4)$$

> $x\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

$$x\,(x+1)\,(x^2+1) \qquad (6.5)$$

> $expand(x\cdot(x+1)\cdot(x^2+1))$

$$x^4+x^3+x^2+x \qquad (6.6)$$

> $\sin(x+y) = expand(\sin(x+y))$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\,\cos(y) + \cos(x)\,\sin(y) \qquad (6.7)$$

> $\sin\left(\dfrac{\mathrm{Pi}}{5}\right)$

$$\sin\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) \qquad (6.8)$$

> $convert(\%, radical)$ #` `radical = juurilauseke

$$\frac{1}{4}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}} \qquad (6.9)$$

<u>Tehtävä:</u> Tutki simplify- ja expand-käskyjen vaikutusta lausekkeisiin $(1+z)\cdot(1+z+z^3)$, $\cos(2\,x)$ ja tan($x+y$). Muunna $\sin\left(\dfrac{\pi}{60}\right)$ juurilausekkeeksi.

> $(1+z)\cdot(1+z+z^2)$

$$-84 \qquad (6.10)$$

Näin pitänyt käydä: z:lla on lukuarvo -5 vanhasta käskystä!

> $restart$

> $(1+z)\cdot(1+z+z^2)$

$$(1+z)\,(z^2+z+1) \qquad (6.11)$$

> $expand(\%)$

$$z^3+2\,z^2+2\,z+1 \qquad (6.12)$$

> $expand(\cos(2\cdot x))$

$$2\,\cos(x)^2-1 \qquad (6.13)$$

> $simplify(\cos(2\cdot x))$

$$\cos(2\,x) \qquad (6.14)$$

> $expand(\tan(x+y))$

$$\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\,\tan(y)} \qquad (6.15)$$

Jonot ja summat

Esimerkki:

> $jono := seq(n^2, n = 0..5)$ #` `ohjelmissa jonot eivät ole äärettömän pitkiä

$jono := 0, 1, 4, 9, 16, 25$ **(7.1)**

> $jono[4]$ #` `indeksöinti alkaa kohdasta 1

9 **(7.2)**

> $?seq$

> $sum(n^2, n = 0..5)$

55 **(7.3)**

> $?sum$

> $limit\left(\frac{n}{5\,n+1}, n = infinity\right)$

$\frac{1}{5}$ **(7.4)**

> $sum\left(\frac{1}{4^n}, n = 0..infinity\right)$

$\frac{4}{3}$ **(7.5)**

Tehtävä: Muodosta jonon $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, n = 1,2,3,... kymmenen ensimmäistä termiä.

> $seq\left(\frac{n^2}{2^n}, n = 1..10\right)$

$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{9}{16}, \frac{49}{128}, \frac{1}{4}, \frac{81}{512}, \frac{25}{256}$ **(7.6)**

Tehtävä: Laske summa $5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$ käyttämällä sum-käskyä.

> $sum(n^3, n = 5..10)$

2925 **(7.7)**

Yhtälön ratkaiseminen

Esimerkki:

> $yhtalo := x^3 - 2\cdot x - 1 = 0$

$yhtalo := x^3 - 2\,x - 1 = 0$ **(8.1)**

> $ratkaisut := solve(yhtalo)$ #` käskyn tuloksena on **jono** kaikista ratkaisuista

$ratkaisut := -1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ **(8.2)**

Ratkaisut voi tarkistaa sijoittamalla, mutta sitä ei tietenkään tarvitse tehdä:

> $x[3] := ratkaisut[3]$ #` `annetaan kolmannelle ratkaisulle uusi nimi

$x_3 := \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ **(8.3)**

> $subs(x = x[3], yhtalo)$ # `tarkistetaan ratkaisu sijoittamalla

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)^3 - \sqrt{5} - 2 = 0 \quad (8.4)$$

> $simplify(\%)$

$$0 = 0 \quad (8.5)$$

> $fsolve(yhtalo, x, complex)$
> # `näin saadaan kaikki polynomiyhtälön ratkaisut numeerisesti

$$-1., -0.618033988749895, 1.61803398874989 \quad (8.6)$$

> $yhtalo2 := x \cdot \sin(x) - 1$

$$yhtalo2 := x \sin(x) - 1 \quad (8.7)$$

> $solve(yhtalo2)$ # `ei osaa ratkaista tarkasti

$$RootOf(\_Z \sin(\_Z) - 1) \quad (8.8)$$

> $fsolve(yhtalo2)$ # `mutta osaa numeerisesti``

$$-1.114157141 \quad (8.9)$$

> $fsolve(yhtalo2, x = 0..10)$ # `jokin ratkaisu ko. väliltä

$$6.439117238 \quad (8.10)$$

Tehtävä: Määritä yhtälön $x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 1 = 0$ tarkat ratkaisut ja niiden likiarvot. Määritä yhtälölle $x \cdot \tan(x) = 1$ jokin positiivinen ratkaisu $x > 0$.

> $solve(x^3 + 2 \cdot x + x - 1 = 0)$

$$\frac{1}{2}\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3} - \frac{2}{\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3}}, -\frac{1}{4}\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3} + \frac{1}{\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3}} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3}}\right), -\frac{1}{4}\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3} + \frac{1}{\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3}} - \frac{1}{2} I\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(4\sqrt{5}+4\right)^{1/3}}\right) \quad (8.11)$$

> $evalf(\%)$

$$0.3221853540, -0.1610926772 + 1.754380960\, I, -0.1610926772 - 1.754380960\, I \quad (8.12)$$

> $solve(x \cdot \tan(x) = 1)$

$$RootOf(\tan(\_Z)\,\_Z - 1) \quad (8.13)$$

> $fsolve(x \cdot \tan(x) = 1)$

$$-0.8603335890 \quad (8.14)$$

> $fsolve(x \cdot \tan(x) = 1, x = 0..10)$

$$6.437298179 \quad (8.15)$$

Funktio ja kuvaaja

Esimerkki:

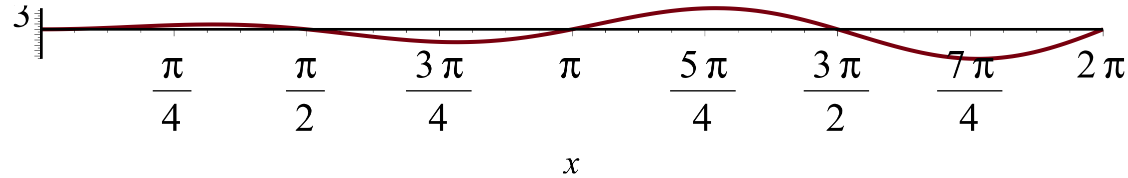
> $f := x \rightarrow x \cdot \sin(2 \cdot x)$ # `nuoli saadaan kirjoittamalla ->

$$f := x \rightarrow x \sin(2\,x) \quad (9.1)$$

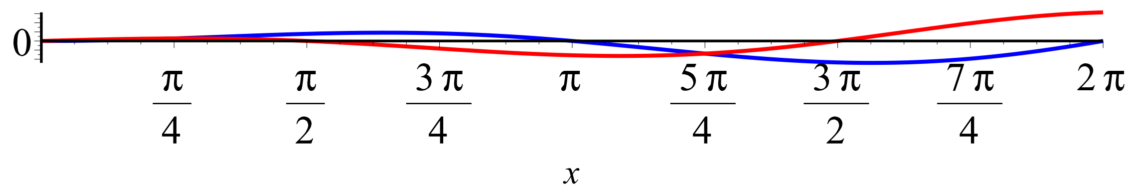
> $f\left(\frac{Pi}{6}\right)$

$$\frac{1}{12}\pi\sqrt{3} \quad (9.2)$$

> *plot*$(f(x), x=0..2\cdot\text{Pi})$ #` tai suoraan *plot*$(x\cdot sin(2\cdot x), x=0..2\cdot Pi)$



> *plot*$([x\cdot\sin(x), x\cdot\cos(x)], x=0..2\cdot\text{Pi}, color=[blue, red])$



> ?*plot*

> ?*plot,options*

> *with*(*plots*)

[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot] **(9.3)**

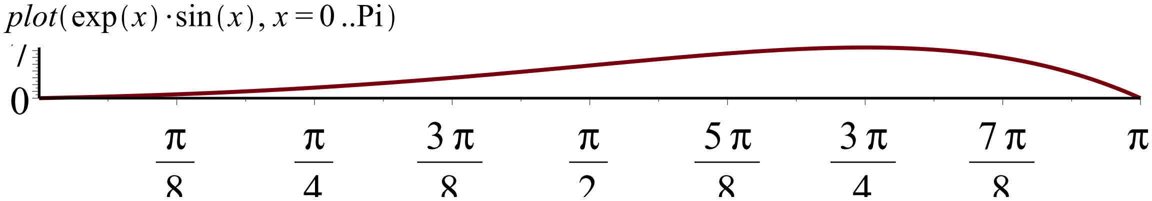
> *plot3d*$(x^2+2\cdot y^2, x=-1..1, y=-1..1, axes=boxed)$ #` kuvaa voi pyörittää hiirellä

Hienompia kuvia saadaan edistyneemmillä plot3d-käskyillä:

> ?*plot3d*

<u>Tehtävä:</u> Piirrä funktion $g(x) = e^x\sin(x)$ kuvaaja välillä [0,π] ja määritä graafisesti sen maksimikohta ja -arvo; klikkaa kuvaa hiiren **oikealla** näppäimellä ja valitse: **Probe Info -> Cursor position**, jolloin koordinaatit näkyvät kursorin kohdalla.

> *plot*$(\exp(x)\cdot\sin(x), x=0..\text{Pi})$



Maksimi on noin 7,5 kohdassa $x=2.3$

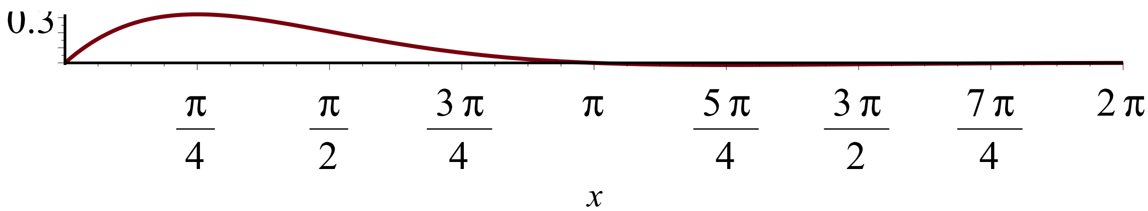
Derivaatta

Esimerkki: Määritetään alla olevan funktion maksimi välillä $[0, \pi]$.

> $f := x \rightarrow \sin(x) \cdot \exp(-x)$

$$f := x \rightarrow \sin(x)\, e^{-x} \tag{10.1}$$

> $plot(f(x), x = 0\,..2 \cdot \text{Pi})$



> $f'(x) = 0$ # `maksimi on derivaatan nollakohdassa

$$\cos(x)\, e^{-x} - \sin(x)\, e^{-x} = 0 \tag{10.2}$$

> $dnollakohta := solve(\%)$ # antaa vain yhden ratkaisun, % = edellisen käskyn tulos

$$dnollakohta := \frac{1}{4}\pi \tag{10.3}$$

> $f(dnollakohta)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}\pi} \tag{10.4}$$

> $maximize(f(x), x = 0\,..\text{Pi})$ # `tai suoraan näin

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}\pi} \tag{10.5}$$

> $maximize(f(x), x = 0\,..\text{Pi}, location)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}\pi}, \left\{\left[\left\{x = \frac{1}{4}\pi\right\}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}\pi}\right]\right\} \tag{10.6}$$

Tehtävä: Määritä funktioiden $\sin(x) + \cos(x)$ ja $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, \pi]$.
Kokeile sekä vaiheittain että suoraan maximize/minimize-käskyillä.
Vihje: Jos ratkaisua ei saada ilmaistua lausekkeena, niin helppo tapa löytää numeerinen ratkaisu on muuttaa
jokin funktion lausekkeen luvuista desimaaliluvuksi (esim $1 + x \rightarrow 1.0 + x$) tai lisätä funktioon häviävän pieni luku (esim. 1e-50 = 10^{-50}).
Toinen tapa on käyttää Optimization-modulin numeerista Maximize/Minimize-komentoa
(esim. $Optimization\text{:-}Maximize(f(x), x = 0\,..10)$)

> $maximize(\sin(x) + \cos(x), x = 0\,..\text{Pi})$

$$\sqrt{2} \tag{10.7}$$

> $maximize\left(\dfrac{\sin(x)}{1+x}, x = 0\,..\text{Pi}\right)$

$$\frac{\sin(RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z + 1, 1.132267725))}{RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z + 1, 1.132267725) + 1} \tag{10.8}$$

> $maximize\left(\dfrac{\sin(x)}{1.0+x}, x = 0\,..\text{Pi}\right)$

$$0.4246077542 \tag{10.9}$$

Integraali

Esimerkki:

> $int(\sin(x)\cdot\exp(x), x)$

$$-\frac{1}{2}\cos(x)\,e^x + \frac{1}{2}\sin(x)\,e^x \quad (11.1)$$

> $'int(x^3, x = 0..3)' = int(x^3, x = 0..3)$

$$\int_0^3 x^3\,dx = \frac{81}{4} \quad (11.2)$$

> $int(\exp(-x^2), x = 0..infinity)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (11.3)$$

> $int(\exp(-x^2), x = 0..1)$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(1)\sqrt{\pi} \quad (11.4)$$

> $evalf(\%)$

$$0.7468241330 \quad (11.5)$$

> ?erf

Tehtävä: Laske funktion $x\cdot\sin(x)$ integraali välillä $[0,\pi]$ ja funktion $\sin(x^2)$ integraali välillä $[0,\infty]$.

Ääretön on *infinity*.

> $Int(x\cdot\sin(x), x = 0..\mathrm{Pi}) = int(x\cdot\sin(x), x = 0..\mathrm{Pi})$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \pi \quad (11.6)$$

> $'int(\sin(x^2), x = 0..infinity)' = int(\sin(x^2), x = 0..infinity)$

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \quad (11.7)$$

Tässä on kaksi erilaista tapaa käyttää "hidastettua" käskyä, jolloin lausekkeen muoto jää näkyviin (esim. tarkistusta varten).

Jos jää ylimääräistä aikaa, niin ...

voit tutustua verkossa olevaan Maple-materiaaliin:

http://math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieO/maple.html

Esimerkiksi Pekka Alestalon kirjoittama Pikaohje sisältää kaikki tavallisimmat käskyt.