1.

Lagrange equations of motion

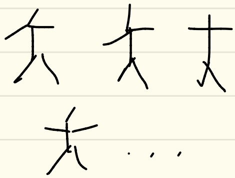
Constraints reduce the number of degrees of freedom.
Constraints imply forces of constraint that force the system to evolve in accordance with the constraints.

N-particles $\Rightarrow$ $n = 3N$ degrees of freedom
k constraints

$$f_j(x_1 \cdots x_n, t) = c_j \quad j = 1, 2, \cdots k$$

Holonomic constraints: constraints depend on coordinates and time, (but not on, for example, velocity)

Examples of constraints:

Lecture:  N - students

1. Generally $3N$ coordinates, but when fixed to seats, $3N$ constraints and all coordinates are fixed.

2. Allow up & down movement $\Rightarrow$ $2N$ constraints
   $\Rightarrow$ N degrees of freedom i.e $z_i(t)$ for each student

3. Student must rise up and sit down in sync
   $\Rightarrow$ just one coordinate $\frac{1}{N}\sum z_i(t) = z(t)$ needed.

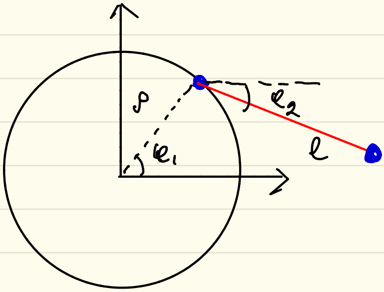
4. Half rises while other half sits down?
   $z_1(t)$ for $i = 1 \dots N/2$ $\quad z_2(t) = -z_1(t)$ for $i = \frac{N}{2}+1 \dots N$
   $\Rightarrow$ still need just one coordinate

What does the virtual displacement look like in this case?
Answer: other half (instantaneously) moves dz up while others go down by dz.

Holonominen rajoite esimerkki:

m_1 ja m_2 l:n pituisen tangon päissä. Toisen pakko liikkua ympyrällä

Koordinaatit (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2)



θ_2 tangon ja z-akselin välinen kulma. Ympyrä xy-tasossa

$$x_1 = \rho\cos\varphi_1 \qquad x_2 = x_1 + l\sin\theta_2\cos\varphi_2$$
$$y_1 = \rho\sin\varphi_1 \qquad y_2 = y_1 + l\sin\theta_2\sin\varphi_2$$
$$z_1 = 0 \qquad z_2 = l\cos\theta_2$$

Holonomiset rajoitteet siis olivat:

(1) $|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| - l = 0$ (tangon pituus)

(2) $z_1 = 0$ (ympyrä xy-tasossa)

(3) $|\bar{r}_1| - \rho = 0$ (massa 1 ympyrällä)

Virtuaalinen työ ja D'Alabertin periaate:

Käyttäen yleistettyjä koordinaatteja q_j ($j=n-k$) voimme kusua koordinaatin x_i differentiaalin

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

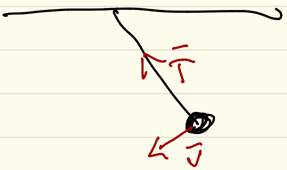
virtuaalinen siirros δx_i tapahtuu välittömästi eli $dt = 0$ ja on konsistentti rajoitteiden kanssa

$$\Rightarrow \delta x_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad \text{ja} \quad \delta \bar{r} = (\delta x_1, \delta x_2 \dots \delta x_n)$$

D'Alambertin periaate: Virtuaalisessa siirtymässä sidoksista johtuvat voimat eivät tee työtä ts.

$$\bar{F}^{(s)} \cdot \delta \bar{r} = 0$$

Miksi tässä on järkeä?: Yksi tapa järkeillä tämä on huomata, että $\delta \bar{r}$ on $\bar{v}\, dt$ eli se on nopeuden suuntainen vektori. Rajoite taas on siihen nähden kohtisuorassa.



Implikaatiot: Newtonin liikeyhtälö yhden virtuaalisen muunnoksen suunnassa $\dot{p}_i = \tilde{F}_i + F_i^{(s)}$

ulkoinen   sidos/rajoite

Summataan nollia ⇒ saadaan edelleen nolla:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i + F_i^{(s)} - \dot{p}_i)\delta x_i = 0$$

D'Alambertin periaate ⇒ $\sum_{i=1}^{n} (F_i - \dot{p}_i)\delta x_i = 0$

Jos meillä ei ole rajoitteita, δx_i:t riippumattomia ja saamme Newtonin yhtälöt. Mutta entä sitten, kun on rajoitteita?

δq_i:t ovat riippumattomia.

Virtuaalinen työ (virtuaalisessa siirroksessa):

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta x_i = \sum_{j=1}^{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

Määritellään yleistetty voima $Q_j = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ jolloin

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n-k} Q_j \delta q_j = \bar{Q}\cdot\delta\bar{q}$$

Mutta meillä oli myös termi $\sum_i \dot{p}_i \delta x_i$. Kun $p_i = m_i \dot{x}_i$,

$$\Rightarrow \sum_j \underbrace{\left(\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)}_{(1)} \delta q_j$$

$$(1) = \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right]$$

Aputuloksia: $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$. Derivoidaan tämä $\dot{q}_j$ suhteen

ja saadaan $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ eli ns "dot-cancellation"

Huomaa, että $x_i(q_1 \dots q_{n-k})$ ei riippunut nopeuksista holonomisessa rajoitteessa.

Sitten vielä yksi... $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{l=1}^{n-k} \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$, $T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2$ on sama asia kuin NII!

Jos erityisesti voima on konservatiivinen, se saadaan derivoimalla potentiaali paikan suhteen $F_i = -\frac{dU}{dx_i}$

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} U(q_1, q_2 \dots q_{n-k}, t)$$

Huomaa taas, että nyt oletamme, ettei potentiaali riipu nopeuksista $\dot{q}_j$ jolloin $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$

Määritellään Lagrangen funktio $L = T - V$

ja saadaan Lagrangen yhtälöt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Huomaa: näitä on vain $n-k$ kappaletta ja L on funktio koordinaateista q_j, nopeuksista $\dot{q}_j$ ja kenties ajasta t.

Tämä on siis sama kuin Newtonin liikeyhtälö, mutta on suoraan yleistettyjen koordinaattien avulla lausuttu. D'Alambertin periaate mahdollisti tämän.

Lagrange's equations & conservative forces

There is now a potential energy $V(x_1 \ldots x_n) = V(q_1 \ldots q_{n-k}, t)$

Generalized force $Q_\sigma = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = -\sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1 \ldots x_n)\right] \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_\sigma} V(q_1 \ldots q_{n-k}, t)$$

(choose one $q_\sigma(x_1 \ldots x_n)$ & use chain rule.)

Generalized force doesn't depend on generalized velocities so $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, \ldots n-k \qquad L \equiv T - V = \text{Lagrangian}}$$

If non-conservative forces (Lorentz force or friction for example) $\tilde{F}$

virtual work: $\delta \tilde{W} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\tilde{F}}_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\tilde{F}}_i \cdot \sum_\sigma \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma$

$$= \sum_\sigma \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\tilde{F}}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}}_{\tilde{Q}_\sigma = \text{generalized force}} \Big) \delta q_\sigma$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \tilde{Q}_\sigma, \quad \sigma = 1 \ldots n-k$$