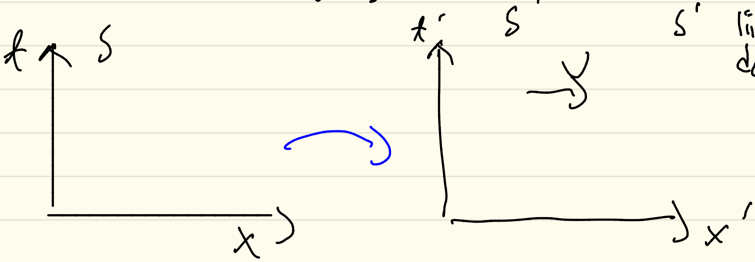
Lorentzin muunnos:



S' liikkuu oikealle nopeudella v.

Haetaan lineaarista muunnosta: valon nopeus c sama S:ssä ja S':ssä:

$x' = Ax + Bt$

$y' = y$ Kertoimet A, B, C, D ??

$z' = z$

$t' = Cx + Dt$

S':n origo: $x' = Ax + Bt = 0$ ja toisaalta $x = vt$

$\Rightarrow Avt + Bt = 0 \Rightarrow B = -Av$

Toisaalta jos liikumme S':n mukana, S liikkuu vasemmalle nopeudella $-v$

S:n origo $x = 0$:

$x' = Ax + Bt$

$-vt' = 0 + Bt \Rightarrow vt' = -Bt$

$t' = Cx + Dt$

$t' = 0 + Dt \Rightarrow vt' = vDt = -Bt \Rightarrow B = -vD$ vrt. aiempi $\Rightarrow A = D$

Valon reitti S:ssä ja S':ssa:

$x' = ct' = Ax + Bt$ $\Rightarrow ct' = Act + Bt$

$x = ct$ (eli sama c!)

Toisaalta: $t' = Cx + Dt = Cct + Dt \Rightarrow ct' = Cc^2t + Dct$

muista $D = A$, $B = -Av$

$\Rightarrow C = -\frac{v}{c^2}A$

Lorentzin muunnos jatkuu ...

eli $B = -vA,\ D = A,\ C = -\frac{v}{c^2} A$

$$x' = A(x - vt)$$
$$t' = A\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

mutta mistä A ??

Käänteismuunnos $v \to -v$

$$x = A(x' + vt)$$
$$t = A\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Toisaalta voimme ratkaista x, t myös yhtälöparista.

$$\begin{aligned} x - vt &= x'/A \quad \| \cdot v/c^2 \\ -v/c^2\, x + t &= t'/A \end{aligned} \Rightarrow (1 - v^2/c^2)t = \frac{1}{A}\left(\frac{v}{c^2}x' + t'\right) \Rightarrow t = \frac{1}{A(1 - v^2/c^2)}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

josta $A = \frac{1}{A(1 - v^2/c^2)}$ eli $\boxed{A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Neliaikan normi?

$$X = (ct, x, y, z) \Rightarrow ds^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$X' = (ct', x', y', z') = \left(\gamma c\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \gamma(x - vt), y, z\right)$$

$$ds'^2 = \gamma^2 c^2\left(t^2 + \frac{v^2}{c^4}x^2 - \frac{2v}{c^2}tx\right) - \gamma^2\left(x^2 + v^2t^2 - 2vxt\right) - y^2 - z^2)$$

$$= t^2\underbrace{\left[\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2\right]}_{(*)} - x^2\underbrace{\left[-\gamma^2\frac{v^2}{c^2} + \gamma^2\right]}_{(**)} - tx\left[2v\gamma^2 - 2v\gamma^2\right] - y^2 - z^2$$

$$\gamma^2 = 1/1 - v^2/c^2$$

$$(*) = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(c^2 - v^2\right) = c^2 \qquad (**) = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\left[1 - v^2/c^2\right] = 1$$

$$\Rightarrow ds'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = ds^2$$

eli tuo on invariantti, kun siirrytään inertiaalikoordinaatistosta toiseen.

Aikavenymä / aikadilataatio

Liikkuvassa kappaleessa aika kulkee hitaammin

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Delta\tau = \gamma\Delta\tau$$

meidän kellon mittaama aika, kun tarkkailemme vaikka sitä avaruusrakettia.

tosiaika eli "proper time" mitä kappaleen mukana kulkeva kello mittaa

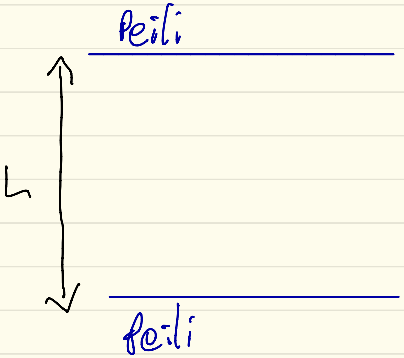
Miksi?

a) Lorentzin muunnoksesta $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

Tosiaikaa mitattaessa $(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \Delta t' = \gamma\Delta\tau$ (huom. $\Delta x' = -v\gamma\Delta\tau = -v\Delta t'$)

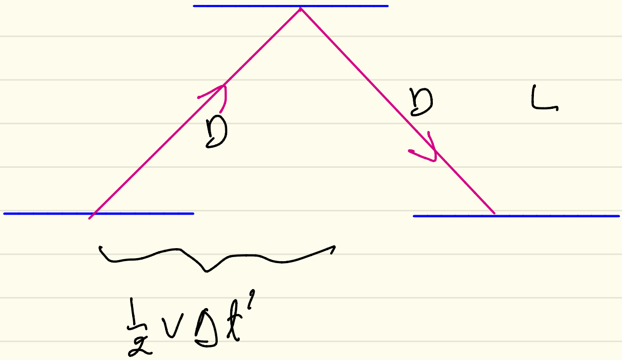
b) Ajatuskoe (fysikaalisempi tapa)



Paikallaan ollessa fotonin edestakaiseen matkaan kuluma aika

$$\Delta t = 2L/c$$

Peilisysteemi liikkuu:



valolta kuluu nyt aika

$$\Delta t' = 2\, D/c$$

sama valonnopeus

Toisaalta Pythagoras kertoo meille hypotenuusan D pituuden

$$D = \sqrt{\tfrac{1}{4} v^2 \Delta t'^2 + L^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t'^2 = \frac{4}{c^2}\left(\frac{1}{4} v^2 \Delta t'^2 + L^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t'^2 \left(1 - v^2/c^2\right) = 4L^2/c^2 = \Delta t^2$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t = \gamma \Delta t$$