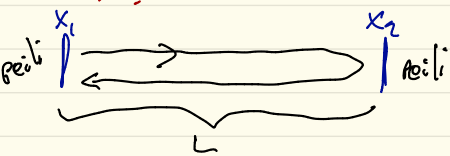
Pituuspuristuma eli "length contraction"

Liikkeessä oleva kappale näyttää kutistuvan liikesuunnassaan. $L' = L/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L$

Miksi?



Taas peilisysteemi. Mitataan pituus mittaamalla valon edestakaismatkaan käyttämä aika

Paikallaan $\Rightarrow L = c\,\Delta t/2$

Olisiko siten liikkeessä $L' = c\,\Delta t'/2 = c\gamma\,\Delta t/2 = \gamma L$ eli venyisi?

EI!!! Muunnoksessa sekä paikat, että ajat voivat muuttua.

Oikea tapa: Mittaat pituuden tarkistamalla päätyjen paikat samaan aikaan $L = x_2 - x_1$, kun $t_2 = t_1$

Liikkuvassa koordinaatistossa:

(1) $\Delta x' = \gamma(L_0 - v\Delta t)$

(2) $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{vL_0}{c^2}\right)$

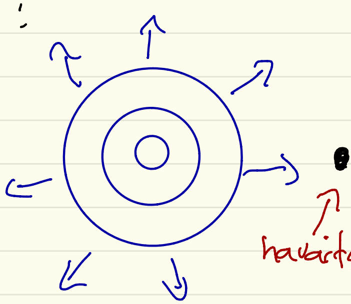
Tämä siis Lorentzin muunnos ja nyt $\Delta t' = 0$ ja tunnemme pituuden L_0 levossa

$(2) = 0 \Rightarrow \Delta t = \frac{vL_0}{c^2}$, josta sijoitus (1):een antaa

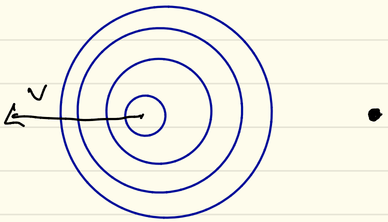
$$\Delta x' = \gamma\left(L_0 - \frac{v^2}{c^2}L_0\right) = L_0' \Rightarrow L_0' = \frac{1}{\gamma}L_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L_0$$

Relativistinen Doppler-efekti:

Paikallaan oleva lähde



lähde liikkuu pois päin:



Tavallisessa Doppler-efektissä aallot venyvät

$$\lambda_{new} = \frac{c}{f_0} + \frac{v}{f_0} = \frac{c+v}{f_0}$$

matka minkä lähde liikkuu yhden periodin aikana

Taajuus muuttuu: $f_{new} = \frac{c}{c+v} f_0$

$$= f_0/(1+\beta), \quad \beta = v/c$$

suhteellisuusteoriasta tulee vielä lisäefekti ajan venymisestä

Lähde "toimii" hitaammin!

$$f_0 \to f_0/\gamma = f_0\sqrt{1-v^2/c^2} = f_0\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}$$

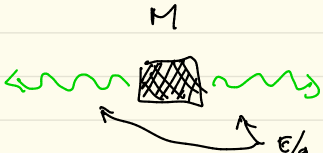
yhteensä

$$\Rightarrow f_{moving} = f_0 \frac{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}{1+\beta} = f_0\sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}$$

Kun $\beta \ll 1$ saamme Taylorin sarjakehitelmällä

$f_{moving} \approx f_0(1-\beta)$ eli sama kuin ilman ajan venymistä.

Energia: $E = mc^2$?



$E/2$ valopulssit. Molemmilla liikemäärä $E/2c$, mutta vastakkaisiin suuntiin. Kappale pysyy siis levossa.

Koordinaatistossa missä M:n nopeus on v sen liikemäärä on $P = Mv$ (oletetaan, että v on "pieni")

Koordinaatisto liikkuu vasemmalle nopeudella v:

siirtyy punaiseen päin, koska Doppler

siirtyy siniseen päin, koska Doppler

Nyt liikemäärät eivät enää kumoudu. Doppler kerroin $(1+v/c)$ oikealle ja $(1-v/c)$ vasemmalle.

Liikemäärän muutos: $\Delta P = \Delta P_{oikea} - \Delta P_{vasen} = \frac{v}{c}\frac{E}{2c} - \left(-\frac{v}{c}\frac{E}{2c}\right) = \frac{vE}{c^2}$

Säteilyn jälkeen kappaleen liikemäärä on siis alentunut

$P' = Mv - \Delta P = v(M - \underbrace{E/c^2}_{\Delta M}) \Rightarrow \Delta M = E/c^2 \Leftrightarrow \boxed{E = \Delta M c^2}$

Lagrangen dynamiikka: relativistinen ??

$S = \int dt\, L[q, \dot{q}]$ missä inertiaalikoordinaatistossa

dt missä inertiaalikoordinaatistossa

Jotenkin sellainen joka on Lorentz invariantti

WHAT IF... käytetään itseisaikaa eli kello kiinni kappaleessa..

$S \sim \int d\tau$, toisaalta labrassa $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$ (koska hiukkaseen kiinnitetty kello tikittää hitaammin)

$v/c \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$

Jos valitaan $S = -m_0 c^2 \int d\tau = \int dt\, -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\overset{v \ll c}{\approx} \int dt \left\{ -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \right\}$$ = KLASSINEN TULOS

vakio

klassinen liike-energia

"Hamiltonin periaate:

Haetaan reittiä, joka antaa itseisajan ääriarvon."

Lagrangen funktio ⇒ liikeyhtälö??

$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ mikä on tätä vastaava Lagrangen yhtälö?

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{-m_0 c^2}{2\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \left(-\frac{2v}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = 0$, jos $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

2. tapa:

$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$ on ongelmallinen suhteellisuusteoriassa, koska se tuskin on Lorentz-invariantti. Jos siirrymme toiseen inertiaalikoordinaatistoon se luultavimmin muuttuu

Ongelma 1: mikä "t"

⇒ ratkaisu (ehkä) korvaa dt Lorentz invariantilla itseisajalla $d\tau = \gamma dt$

Ongelma 2: $\bar{p}$ ja $\bar{F}$ ovat 3D avaruuden vektoreita, kun taas Lorentz muunnoksiin menee sisään 4 ulotteisia vektoreita. Sopivasti muuntuvat ovat nelivektoreita. Korvataan $\bar{p}$ ja $\bar{F}$ jollain 4-liikemäärällä ja 4-voimalla. Näiden nollas komponentti tulee jotenkin aikakoordinaatista.

4-liikemäärä laskareissa (derivoi nelipaikkaa itseisajan suhteen ja kerro lepomassalla)

⇒ avaruuskomponentit antavat yllä olevan liikeyhtälön. Aikakomponentti antaa energian muutoksen yhtälön.

Toinen tapa samaan asiaan:

$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ on invariantti

kun kello kiinni kappaleessa $\Rightarrow d\tau = ds/c$, $(dx = dy = dz = 0)$

$\int \frac{ds}{c}$ optimointi $\Leftrightarrow$ haetaan lyhintä reittiä, kun <u>metriikka</u> kuten ds:issä

$$ds = c\,d\tau = \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}}\, dt$$

4-vektori aika-avaruuden pisteelle

$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

Määritellään Minkowskin metriikka: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (Einsteinin summaussääntö eli toistuvan indeksin yli summataan)

$\Rightarrow$ Invariantti aika intervalli: $\Delta\tau = \int_{path} \underbrace{\frac{1}{c}\sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}}_{d\tau}$