Mitä yleisessä suhteellisuusteoriassa tapahtuu?

Suppeammassa suhteellisuusteoriassa meillä oli intervalli jollekin hiukkasen radalle

$$\Delta\tau = \int_{path} d\tau = \int \frac{ds}{c} = \int_{path} \frac{1}{c}\sqrt{\underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\text{metriikka}}\, dx^\mu dx^\nu}$$

Yleisessä suhteellisuusteoriassa: $\eta_{\mu\nu} \longrightarrow \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Metrinen tensori}}}{g_{\mu\nu}}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Mistä $g_{\mu\nu}$ saadaan?

Vastaus: Einsteinin kenttäyhtälöistä

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{metriikan ja sen} \\ \text{derivaattoja täällä}}}{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}} = \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{stressi-energiatensori} \\ \text{täällä}}}{\kappa T_{\mu\nu}} \qquad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Eli energiajakaumat määrittävät avaruuden metriikan. Yhtälöt vaikeita, mutta sopivalla rajalla näyttää Newtonin painovoimalta. Yleisesti kuitenkin uusia asioita.

Lorentzin muunnos: mitä kentille tapahtuu?

4-paikka $(ct, x, y, z) \to (ct', x', y', z') = X'$

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_x} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$

$$A^\mu = (\phi/c, \underbrace{A_x, A_y, A_z}_{\text{vektoripotentiaali}}) \text{ on 4-potentiaali}$$

skaalari potentiaali

sähkökenttä $\bar{E} = -\nabla\phi - \partial\bar{A}/\partial t$, $\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$

A^μ on 4-vektori ja muuntuu

$$A^{\mu'} = \Lambda_x A^\mu \Rightarrow \begin{aligned} \phi' &= \gamma(\phi - vA_x) \\ A_x' &= \gamma(A_x - \tfrac{v}{c^2}\phi) \\ A_y' &= A_y \\ A_z' &= A_z \end{aligned}$$

tai yleisemmin nopeuden suuntaisten ja kohtisuorien komponenttien avulla

$$\Rightarrow \begin{aligned} \phi' &= \gamma(\phi - vA_\parallel) \\ A_\parallel' &= \gamma(A_\parallel - v\phi/c^2) \\ A_\perp' &= A_\perp \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{A}' = \bar{A} - \frac{\gamma\phi}{c^2}\bar{v} + (\gamma - 1)(A\cdot\hat{e}_v)\hat{e}_v$, $\hat{e}_v$ = v:n suuntainen yksikkövektori.

$\phi' = \gamma(\phi - \bar{A}\cdot\bar{v})$

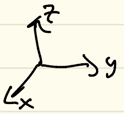
Kenttien muuntaminen hieman sotkuisempaa ... hypätään tulokseen

$\bar{E}_\parallel' = E_\parallel$ & $\bar{B}_\parallel' = \bar{B}_\parallel$ eli liikkeen suuntaiset pysyvät ennallaan

$\bar{E}_\perp' = \gamma(\bar{E}_\perp + \bar{v}\times\hat{B})$

$B_\perp' = \gamma(\bar{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\bar{v}\times\bar{B})$

Esimerkki: alussa pelkkä sähkökenttä y-suunnassa



$$E_x = 0,\ E_y = E_y,\ E_z = 0$$

Jos siirrymme liikkuvaan koordinaatistoon missä $\bar{v} = v\hat{e}_x$

$$E_x' = E_x = 0$$
$$B_x' = B_y = 0$$

$$\bar{E}_\perp' = (0, E_y', E_z') = \gamma\big[(0,E_y,0) + \underbrace{\bar{v}\times\bar{B}}_{0}\big] = \gamma(0,E_y,0)$$

$$\Rightarrow E_y' = \gamma E_y$$
$$E_z' = 0$$

$$\bar{B}_\perp' = \gamma\left(\bar{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\bar{v}\times\bar{E}\right) = -\frac{\gamma}{c^2}(v,0,0)\times(0,E_y,0) = -\frac{\gamma}{c^2}\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ v & 0 & 0\\ 0 & E_y & 0\end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\gamma}{c^2}vE_y\hat{e}_z$$

ilmestyy magneettikenttä negatiiviseen z-akselin suuntaan.

Jos alussa oli paikallaan oleva varaus q, $(\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v}\times\bar{B})$

siihen vaikutti voima $\bar{F} = q(0,E_y,0) + q\underbrace{\bar{v}_0}_{0}\times\bar{B} = qE_0\hat{e}_y$

Liikkuvassa koordinaatistossa hiukkasen nopeus $\bar{v}_0 \to -\bar{v} = -v\hat{e}_x$

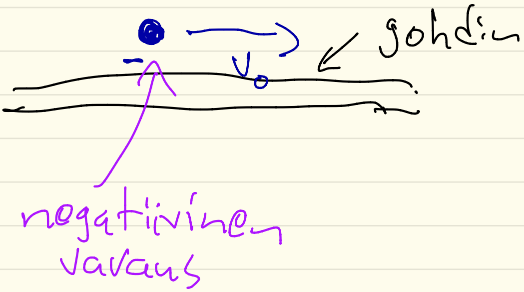
$$\Rightarrow \bar{F}' = q\bar{E}' + q\bar{v}_0\times\bar{B}' = q\gamma E_y\hat{e}_y - qv\,\hat{e}_x\left(-\frac{\gamma}{c^2}vE_y\right)\hat{e}_z$$
$$= q\gamma E_y\hat{e}_y - \frac{qv^2\gamma}{c^2}E_y\hat{e}_y$$
$$= q\gamma E_y\hat{e}_y\left(1 - v^2/c^2\right) = q\sqrt{1-v^2/c^2}\,E_y = \bar{F}/\gamma$$

$\Delta t' = \gamma\Delta t$, liikemäärän muutos alussa $\bar{F}\Delta t$

liikemäärän muutos liikkuvassa koordinaatistossa

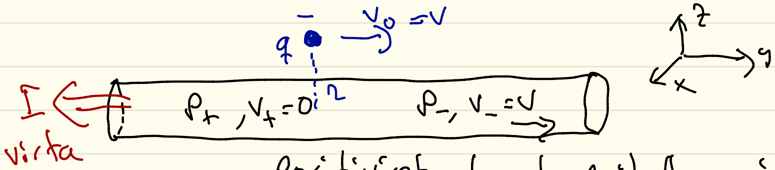
$\bar{F}'\Delta t' = F/\gamma \cdot \gamma \cdot \Delta t = F\Delta t$ eli sama mutta nyt osa voimasta "magneettista"

Eri koordinaatistoissa fysiikka voi olla samaa vaikka sen jako sähkö- ja magneettikenttiin voi muuttua.



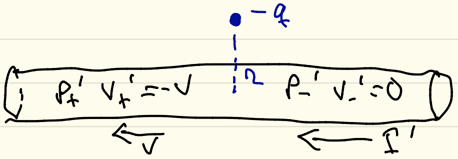
2 eri mahdollisuutta tarkastella fysiikkaa

S: johdin on paikallaan ja varaus liikkuu



Positiiviset ytimet paikallaan ja johdin elektronit liikkuvat päinvastaiseen suuntaan kuin virta.

S': varaus on paikallaan jolloin positiiviset varaukset johtimessa liikkuvat (vasemmalle). Valitaan yksinkertaisuuden vuoksi $v_0 = v$, jolloin johdin elektronit näyttävät olevan paikallaan.



Ensin S:ssä:

Johtimessa kulkeva virta aiheuttaa magneettikentän $\bar{B}$ ja se aiheuttaa voiman $q\bar{v}_0 \times \bar{B}$ varaukseen.

Jos virta on vasemmalle, kenttä on "paperin sisään". Koska varaus $q<0$, voima on johtimen suuntaan. Tarkemmin Amperen laista

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I \Leftrightarrow 2\pi r\, B = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Toisaalta virta $I = (\rho_- \underbrace{v_-}_{v} + \rho_+ \underbrace{v_+}_{0})A = \rho_- v A$, missä A on johtimen poikkipinta-ala (huom: neutraali johdin $\Rightarrow \rho_+ = \rho_-$)

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \rho_- v A}{2\pi r}$$

$$\bar{F} = q v_0\, \hat{e}_y \times B(r) \times (-\hat{e}_x) = \frac{\mu_0 A \rho_- q v v_0}{2\pi r} \qquad \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0 A \rho_- v v_0}{2\pi r} q\, \hat{e}_z = \frac{\mu_0 A \rho_- v^2 q}{2\pi r} \hat{e}_z$$

$\Rightarrow$ alaspäin kun $q<0$.

Sitten tilanne S' koordinaatistossa.

Koska varaus on paikallaan, voimaa $q\bar{v}_0 \times \bar{B}$ ei voi olla! Negatiiviset varaukset eivät enää aiheuta virtaa, mutta positiiviset kyllä, josta joku $\bar{B}'$ magneettikenttä. Toisaalta, who cares, koska hiukkasen nopeus on nolla. Koska magneettista voimaa ei ole, jostain on pakko ilmestyä sähkökenttä ja sen aiheuttama voima. Liikkuva johdin näyttää varatulta?!! Kuinka mahdollista?

Varaustiheydet $\rho_+ = \rho_-$, kun johdin levossa. Kun johdin liikkuu, varauksen tulee säilyä, mutta varaustiheyksien ei.

S':ssa pituuspuristuma positiivisille varauksille ⇒ tilavuus missä varaukset ovat muuttuu ⇒ varaustiheys muuttuu.

Levossa johtimen pituus L_0 ja varaustiheys ρ_0. Kokonaisvaraus siis

$$Q = \rho_0 L_0 A$$

Liikkeessä $L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$ ja A pysyy samana

Jotta varaus pysyy ennallaan, liikkeessä varaustiheys $\rho = \rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$

positiivisille varauksille ρ_+'

Negatiivisille varauksille $\rho_-' = \rho_0$, koska ne ovat levossa S':ssa. Sen sijaan S:ssä elektronit liikkuvat ja

$$\rho_- = \frac{\rho_-'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \rho_-' = \rho_-\sqrt{1-v^2/c^2}$$

S':ssa varaustiheys siis $\rho' = \rho_+' + \rho_-' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \rho_-\sqrt{1-v^2/c^2}$

S:ssä johdin on neutraali, jolloin $\rho_- = -\rho_+$ $\Rightarrow \rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

S':ssa johdin on siis positiivisesti varattu ja kenttä osoittaa johtimesta pois päin

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A\, v^2/c^2}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (\nabla\cdot E = \rho/\varepsilon_0)$$

Huom! S' on nyt koordinaatisto missä varaus näyttää olevan paikallaan. dt' on siis itseisaika. Aiemmassa esimerkissä varaus oli pilkullisessa koordinaatistossa liikkeessä. Siksi gammat toisin päin.

Voima kohti johdinta, koska $q<0$.

$$F' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\rho_+ A\, v^2/c^2}{r\sqrt{1-v^2/c^2}} = F/\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0)$$

Toisaalta voimat muuntuvat myös, kun siirrytään S:stä S':uun

Liikemäärän muutos S:ssa $\Delta p_z = F\Delta t$, S':ssa taas $\Delta p_z' = F'\Delta t'$

Varaus on levossa S':ssa ⇒ aikadilataatio $\Delta t' = \sqrt{1-v^2/c^2}\,\Delta t$

$$\Rightarrow \Delta p_z' = \frac{F}{\cancel{\sqrt{1-v^2/c^2}}}\cdot\cancel{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\Delta t = F\Delta t$$ eli sama!!

SAMA FYSIIKKA LOPULTA MOLEMMISSA TAPAUKSISSA.

Kytkentä kenttien ja hiukkasten välillä:

Kenttäteorioissa Lagrangen tiheys niin, että vaikutus

$$S = \int dx\,dy\,dz\,dt\,\mathcal{L}[\text{kenttiä ja niiden derivaattoja}]$$

Hiukkasella: $S = \int dt\, L[\text{hiukkasen paikkoja ja nopeuksia}]$

Jos SM kenttä vaikuttaa hiukkaseen, sen pitää olla varattu ja hiukkanen "tuntee" kentän suuruuden kohdallaan.

$$L_{\text{coupling}} = \sum_i q \dot{x}_i A_i - q \phi$$

vektoripotentiaali pisteessä ($x = x_1, y = x_1, z = x_3$)

skalaaripotentiaali pisteessä ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$)

Mitenkä tämän voi kirjoittaa Lagrangen tiheytenä ... siis niin, että integraali myös avaruuskoordinaattien yli?

Vastaus: Diracin deltafunktiolla

$$L_{\text{coupling}} = \int dx\,dy\,dz\; q\,\delta(\bar{x} - \bar{x}_i)\,\bar{x}_i \cdot \tilde{A}_i(\bar{x}, t) - q\,\delta(\bar{x} - \bar{x}_i)\,\phi(\bar{x}, t)$$

Koska $\int dx\,dy\,dz\,\delta(\bar{x} - \bar{x}_0)\, f(x) = f(\bar{x}_0)$

Voidaan määritellä varaustiheys $\rho(x,t) = q\,\delta(\bar{x} - \bar{x}_i)$

Tuo termi siis antaa Lorentzin voiman $\hat{F} = q\hat{E} + q\bar{v} \times \hat{B}$ hiukkasen dynamiikkaan. Se kertoo kuinka SM-kenttä $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$ vaikuttaa.

MUTTA sama termi vaikuttaa myös toiseen suuntaan. Se kertoo kuinka kenttä muuttuu varaustiheyden vuoksi!

Jos esimerkiksi hakisimme yhtälöä $\phi(\bar{x},t)$:lle, Hamiltonin periaate johtaa Euler-Lagrange yhtälöön, jossa on termi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow -\rho(\bar{x},t) \text{ termi.}$$

Varaustiheys on lähdetermi sähkömagneettisen kentän skalaaripotentiaalille.

Samalla tavalla yhtälöön $A_i(\bar{x},t)$:lle ilmestyy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = \rho \dot{x}_i \Rightarrow \text{varaustiheys} \times \text{nopeus} = \text{virrantiheys } j(\bar{x},t)$$

Virrantiheys lähteenä vektoripotentiaalille / magneettikentälle.

Koko Lagrangen tiheys muuten olisi

$$\mathcal{L} = \underset{\text{hiukkanen}}{-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\,\delta(\bar{x}-x_i)} + \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}|\bar{E}(\bar{x},t)|^2 - \frac{1}{2\mu_0}|B(\bar{x},t)|^2}_{\Rightarrow \text{ kenttä yksinään}}$$

$$\underbrace{-\rho(x,t)\phi(\bar{x},t) + \bar{j}(\bar{x},t)\cdot\bar{A}(x,t)}_{\text{materian ja kentän kytkentä}}$$

Näin saamme yhtälöt, joissa kenttä vaikuttaa hiukkaseen ja hiukkanen kenttään. Kaikki ovat dynaamisia toisiinsa kytkettyjä vapausasteita.

Kytkentä sievenee pistetuloksi 4-virrantiheyttä ja 4-potentiaalia käyttäen. Se pistetulo on skalaari ja ei riipu inertiaalikoordinaatistosta.