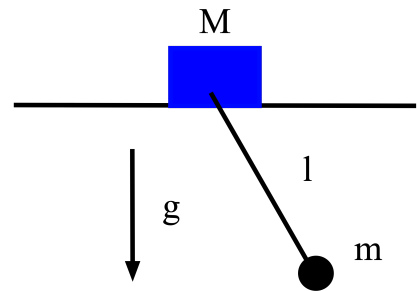


PHYS-C0230 Klassinen dynamiikka  
Tentti 8.6.2023

Täysiin pisteisiin odotetaan huolellista selitystä/johtoa. Jos jättää kovin paljon välivaiheita pois, voi menettää pisteitä.

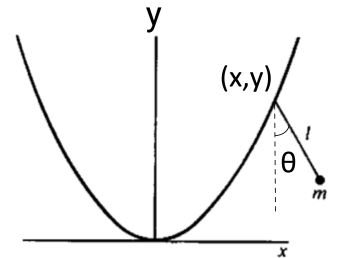
Heiluri, jonka pituus on  $l$  ja massa  $m$ , on kiinnitetty vaakasuoralla pinnalla olevaan massaan  $M$ . Kiinnityspiste voi siis liikkua ja se liikkuu kitkattomasti. Painovoima vaikuttaa alaspäin painovoimakiihtyvyydellä  $g$ .



1. a) Muodosta Lagrangen funktio (3p.)  
b) Johda tilannetta kuvaavat Lagrangen likeyhtälöt ja osoita, että massan  $M$  tullessa suureksi yhtälö(t) lähestyvät sellaisen heilurin likeyhtälöä, jonka kiinnityspiste pysyy paikallaan (tai liikkuu vakionopeudella) (2p.).  
c) Onko tilanteessa syklisiä koordinaatteja? (1p.)

a) Heilurin kiinnityspiste liikkuu paraabelilla  $y = ax^2$ . Painovoima vaikuttaa alaspäin. Käyttämällä kiinnityspistettä ( $x$ :n tunteminen riittää  $y$ :n tuntemiseksi) ja heilurin kulmaa yleistetyinä koordinaatteina, johda heilurin Lagrangen funktio. (3p.)

2. b) Laske kulmakoordinaattiin ja  $x$ :ään liittyvät kanoniset liikemäärät, ja niitä ja Hamiltonin funktion määritelmää hyväksi käyttäen, laske systeemin Hamiltonin funktio. (3p.)  
Avuksi: Sievennykset Hamiltonin funktion laskussa voivat olla työläitä eikä niitä tarvitse tehdä välttämättä loppuun asti. Ajatuksen on kuitenkin tultava laskusta selväksi.



3. a) Johda Lagrangen yhtälö käyttäen Hamiltonin periaatetta. Riittää tarkastella tilannetta missä on yksi yleistetty koordinaatti. (4p.)  
b) Osoita, että funktiolle  $f(q, p, t)$  ( $q$  on yleistetty koordinaatti ja  $p$  sitä vastaava kanoninen liikemäärä) pätee yhtälö

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1)$$

missä  $\{f, H\}$  on Poissonin sulut. Voit olettaa Hamiltonin likeyhtälöt tunnetuksi. (2p.)

Vihje:

$$\{A(q, p), B(q, p)\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (2)$$

Meillä on neljä aika-avaruuden tapahtumaa A, B, C ja D kuten oheisessa kuvassa. Kuvaan on merkitty aika- ja paikka-akselit levossa ja liikkuvassa koordinaatistossa. Yhteys näiden välillä perustuu Lorentzin muunnokseen.

- a) Kerro tapahtumien aikajärjestys (ensimmäisestä viimeiseen) molemmissa koordinaateissa. Piirtämällä suorat valon liikkeelle tapahtumasta A, päättele mitkä muista tapahtumista voivat olla siihen kausaalisessa yhteydessä eli mille tapahtumille A voi olla "syy" (2 p.)
- b) Kerro tapahtumien paikkajärjestys (pienimmästä paikkakoordinaatista suurimpaan) molemmissa koordinaateissa (2p.)
- c) Lähtien liikkelle neli-liikemäärästä  $\mathbf{P} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ , missä  $E$  on energia,  $c$  on valonnopeus ja  $p_\alpha$  on liikemäärän  $\alpha$ -komponentti, laske relativistisen hiukkasen (lepomassa  $m_0$ ) Hamiltonin funktio (ilman potentiaalia) eli se miten energia lausutaan liikemäärän funktiona. (2p.)  
Vihje: nelivektorin pistetulo on invariantti.

