Sylvesterin kriteeri (TFM 2023)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Delta_k = |A^{(k)}|$, missä $A^{(k)}$ on lävistäjälohko $(k \times k)$

$$\Delta_1 = |\alpha_{11}|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

LAUSE $\underset{n \times n}{A}$ on symmetrinen ja

(a) pos. def. joss $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$

(b) neg. def. joss $(-1)^k \Delta_k > 0$ kaikilla k

(c) indefiniitti jos sääntö pettää

väärän merkin takia

(d) kriteeri ei määritä definiittisyyttä,

jos $\Delta_k = 0$

(joss = jos, ja vain jos)

TODISTUS (INDUKTIO)

Pos. DEF $\quad \Delta_1 = \alpha_{11} > 0$ $\quad$ (PERUSTA)

Oletetaan, että kriteeri on voimassa
$(n-1)\times(n-1)$-matriiseille ja että $\underset{n\times n}{A}$ s.e.
$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$. $A^{(n-1)}$ on pos. def. (OLETUS)

IDEA: Tarkastellaan negatiivisia ominaisarvoja.

Ensin: A:lla on enintään yksi negatiivinen oa.

VO: Niitä on kaksi. Tällöin on olemassa

u, v (ov:t) s.e. $u^T A u < 0$ ja $v^T A v < 0$;

Spektraaliteoreema: $u^T v = 0$

Asetetaan $w = v_n u - u_n v$ s.e. $w_n = 0$.

Tällöin $w^T A w > 0$ induktio-oletuksen mukaan.

Toisaalta, $w^T A w = v_n^2 (u^T A u) + u_n^2 (v^T A v) < 0$

RR

Jos taas täsmälleen yksi on negatiivinen, on $|A| < 0$, mutta $\Delta_n > 0$. Nolla ei myöskään voi olla oa.

Kaikki oa:t ovat siis positiivisia ja A pos. def.

NEG. DEF Tarkastele matriisia $-A$.

INDEFINIITTI Jos $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{k-1} > 0$, mutta $\Delta_k < 0$ on $A^{(k)}$:lla täsmälleen yksi $\lambda < 0$.

MUUTOIN Pos. SEMI. DEF, NEG. SEMI. DEF, INDEF. ? Todistus pysähtyy, jos $\Delta_k = 0$. $\square$