

MS-A0201  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)  
Luento 2: Usean muuttujan funktiot

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos<sup>1</sup>  
Aalto-yliopisto

Kevät 2023

---

<sup>1</sup>Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

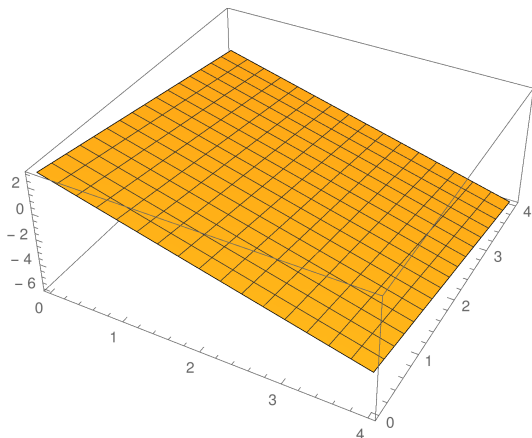
# Usean muuttujan funktiot

- Usean muuttujan (reaaliarvoisella) funktiolla tarkoitetaan funktiota  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  on funktion määrittelyjoukko.
- Tällainen funktio siis liittyy reaalisiin parametreihin  $x_1, \dots, x_n$  reaaliluvun  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Joskus (vars. fysiikassa) tällaista funktiota sanotaan skalaarikentäksi.
- **Esim.** Kaava  $f(r, h) = \pi r^2 h$  määrittelee kahden muuttujan  $r, h$  funktion. Tämän funktion arvo on sylinterin tilavuus, kun  $r$  on sen säde ja  $h$  korkeus.

Tähän sovellukseen liittyvä funktion määrittelyjoukko on tason I neljännes,  $D = \{(r, h) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, h \geq 0\}$ .

Funktion määräävä matemaattinen kaava on kuitenkin määritelty ja mielekäs kaikilla  $(r, h) \in \mathbb{R}^2$ , siis myös negatiivisilla luvuilla.

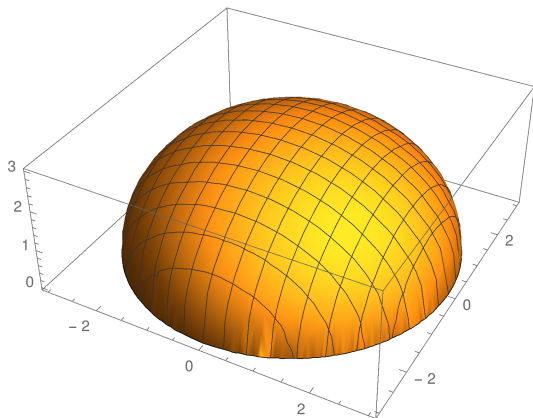
# Esimerkki 1



Funktion kuvaaja  $z = f(x, y)$ , kun

$$f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right).$$

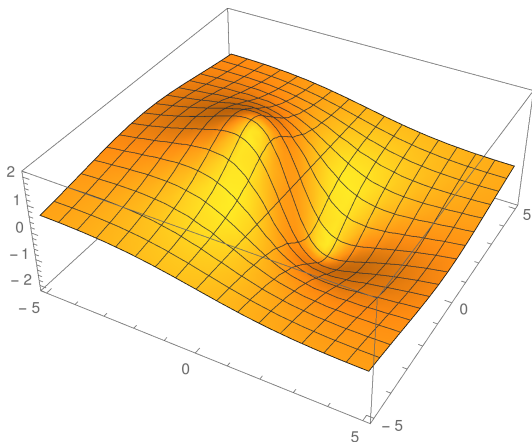
## Esimerkki 2 (paikallinen maksimi)



Funktion kuvaaja  $z = f(x, y)$ , kun

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

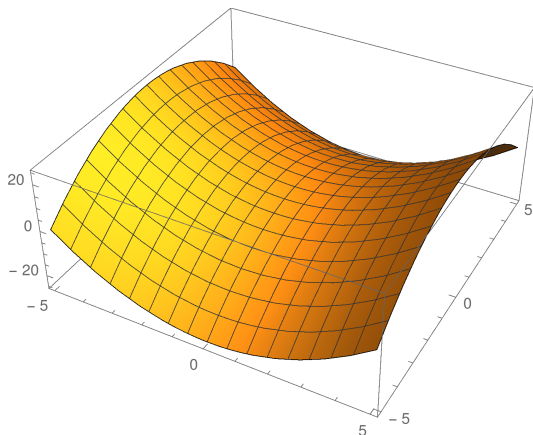
## Esimerkki 3 (maksimi ja minimi)



Funktion kuvaaja  $z = f(x, y)$ , kun

$$f(x, y) = \frac{-6x}{2 + x^2 + y^2}.$$

## Esimerkki 4 (satulapinta)



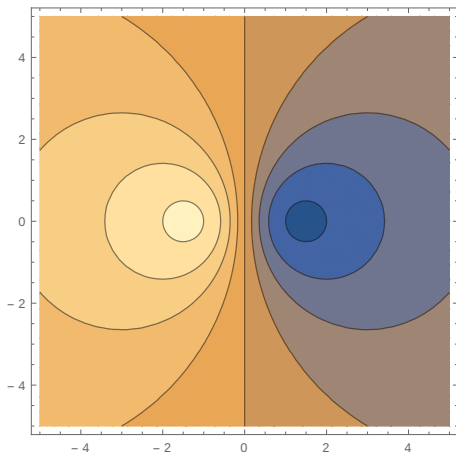
Funktion kuvaaja  $z = f(x, y)$ , kun

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

# Tasa-arvokäyrät

- Olkoon  $c \in \mathbb{R}$  vakio,  $D \subset \mathbb{R}^2$  ja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funktio.
- Tällöin joukko  $C = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$  on usein tasokäyrä.
- Kyseinen pistejoukko voi olla myös tyhjä (jos  $f$  ei saa arvoa  $c$ ) tai vaikkapa koko taso (jos  $f$  on vakio).
- Mikäli joukko  $C$  on tasokäyrä, sitä sanotaan funktion  $f$  arvoon  $c$  liittyväksi tasa-arvokäyräksi.
- **Esim.** Korkeuskäyrät kartalla ovat tasa-arvokäyriä funkiolle, joka liittää kartalla olevaan pisteeseen  $(x, y)$  korkeuden meren pinnasta ko. pisteessä.
- Kolmiulotteisessa tapauksessa pistejoukot  $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$  ovat yleensä pintoja (eivät siis avaruuskäyriä).

## Esimerkki 5 (vrt. Esim. 3)

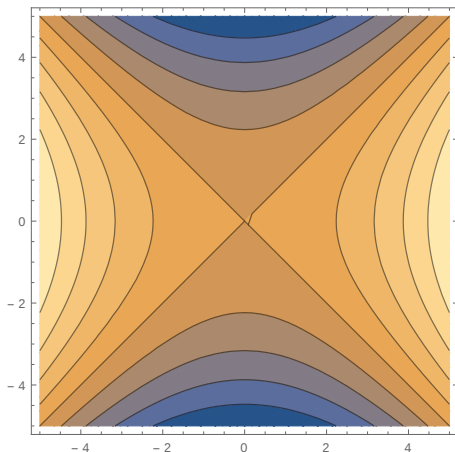


Funktion  $z = f(x, y)$  tasa-arvokäyrät, kun

$$f(x, y) = \frac{-6x}{2 + x^2 + y^2}.$$



## Esimerkki 6 (vrt. Esim. 4)



Funktion  $z = f(x, y)$  tasa-arvokäyrät, kun

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

## Raja-arvo monen muuttujan tapauksessa

- Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funktio.
- Oletetaan lisäksi, että piste  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  on joukon  $D$  kasaantumispiste eli kaikilla  $r > 0$  joukko  $D \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < r\}$  on epätyhjä.
- Tällöin sanotaan, että funktiolla  $f$  on raja-arvo  $L$  pisteessä  $\mathbf{y}_0$  ja merkitään

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}) = L, \quad \text{missä } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D,$$

jos kaikilla  $\varepsilon > 0$  on olemassa luku  $\delta = \delta(\varepsilon)$  siten, että  $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$  aina, kun  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < \delta$  ja  $\mathbf{x} \in D$ .

# Laskusääntöjä

Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $\mathbf{y}_0$  joukon  $D$  kasaantumispiste ja  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  sellaisia funktiota, että  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}) = L$  ja  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} g(\mathbf{x}) = M$ . Tällöin:

1

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) = L \pm M.$$

2

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = LM.$$

3

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L}{M}, \text{ jos } M \neq 0.$$

4 Jos  $L \in (a, b)$  ja  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva pisteessä  $L$ , niin

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_0} F(f(\mathbf{x})) = F(L).$$

## Esimerkki 7



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (2x - y^2) = 4 - 9 = -5.$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x^2 y = a^2 b.$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/3, 2)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

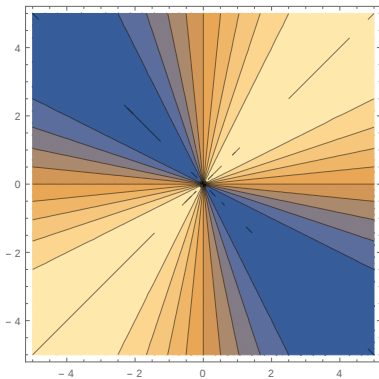
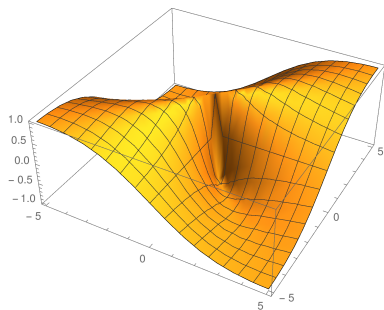
## Raja-arvon tutkiminen käyrien avulla

- Yhden muuttujan tapauksessa raja-arvoa tutkitaan yleensä oikean- ja vasemmanpuoleisen raja-arvon avulla.
- Tämä ajatus ei kuitenkaan toimi usean muuttujan tapauksessa, koska yleensä on olemassa äärettömän monta suuntaa (eli ko. pisteen kautta kulkevaa käyrää), joista pistettä  $y_0$  voidaan lähestyä joukossa  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .
- Mikäli kuitenkin on olemassa kaksi käyrää  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2: [a, b] \rightarrow D \cup \{\mathbf{y}_0\}$ , siten että  $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b) = \mathbf{y}_0$  mutta

$$\lim_{t \rightarrow b} f(\mathbf{r}_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow b} f(\mathbf{r}_2(t)),$$

tai jompaa kumpaa kyseisistä raja-arvoista ei ole määritelty, niin tällöin funktiolla  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ei voi olla raja-arvoa pisteessä  $\mathbf{y}_0$ .

## Esimerkki 8 1/2



Tutkitaan funktion  $f(x, y)$  raja-arvoa pisteen  $(0, 0)$  ympäristössä, kun

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

## Esimerkki 8 2/2

- Jos pistettä  $(0, 0)$  lähestytään  $x$ -akselin suunnasta eli pitkin käyrää  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i}$ , saadaan

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0.$$

- Toisaalta suoralla  $x = y$ , joka voidaan parametrisoida  $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ , saadaan

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t^2}{2t^2} = 1.$$

- Näin ollen, funktiolla  $f$  ei ole raja-arvoa pisteessä  $(0, 0)$ .

## Esimerkki 9

- Tutkitaan funktion

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

raja-arvoa pisteessä  $(0, 0)$ .

- Koska funktion arvo on 0 koordinaattiakseleille, raja-arvon on oltava 0 (jos se on olemassa). Itse asiassa kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + kt\mathbf{j}$  saadaan

$$f(t, kt) = \frac{2kt^3}{t^4 + k^2t^2} = \frac{2kt}{t^2 + k^2} \rightarrow 0, \text{ kun } t \rightarrow 0.$$

- Kuitenkin valinnalla  $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$  saadaan

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^4}{t^4 + t^4} = 1.$$

- Siten tällä funktiolla ei ole raja-arvoa origossa.



## Esimerkki 10

- Osoitetaan, että

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

- Käyttämällä epäyhtälöä  $x^2 \leq x^2 + y^2$  saadaan

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \text{ kun } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

- Formaalisti: Raja-arvon määritelmän ehto toteutuu, jos valitaan  $\delta = \varepsilon$ .

- Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ja  $\mathbf{x}_0 \in D$ . Funktio  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{x}_0$ , jos

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

- Funktio on jatkuva joukossa  $D$ , jos se on jatkuva jokaisessa joukon  $D$  pisteessä.